

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS POR ANALOGIA DE GRELHA

JULIANA SÁ BRITO STRAMANDINOLI

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio

Florianópolis
2003

Aos meus pais,
por tudo que fizeram
por mim.

AGRADECIMENTOS

Em especial ao Professor Daniel Domingues Loriggio pela dedicação, compreensão, tranquilidade e excelente orientação prestada durante a execução deste trabalho.

À Professora Henriete Lebre La Rovere pelo auxílio na utilização do programa SAP2000 e pelas contribuições na parte de elementos finitos.

Ao meu pai, engenheiro e professor, Antonio Stramandinoli Junior pela motivação inicial e pelas relevantes contribuições durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento – CNPq, pela bolsa de estudo concedida, a qual permitiu a realização deste trabalho.

Aos parentes e amigos que sempre me apoiaram e incentivaram em todos os momentos, em especial à minha irmã Renata.

Ao Leco por ter estado ao meu lado, fazendo com que esta fase da minha vida tenha sido muito feliz.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da UFSC, que auxiliaram direta e/ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	I
LISTA DE TABELAS.....	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	XI
RESUMO.....	XIII
ABSTRACT	XIV
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 INTRODUÇÃO.....	1
1.2 HISTÓRICO	2
1.3 JUSTIFICATIVA.....	8
1.4 OBJETIVOS.....	8
2 TEORIA DAS PLACAS E DAS GRELHAS	10
2.1 TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO	10
2.2 TEORIA DAS GRELHAS	15
2.2.1 MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS	15
2.2.2 GRELHAS PLANAS	17
2.3 LAJES NERVURADAS	21
3 ANALOGIA DE GRELHA	26
3.1 MODELAGEM	28
3.2 SISTEMA DE COORDENADAS E GRAUS DE LIBERDADE	28
3.3 PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS.....	28
3.4 CARREGAMENTO	30
4 MODELAGEM DE LAJES MACIÇAS	31
4.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS	34
4.1.1 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES QUADRADAS COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_y/L_x = 1$	34

4.1.2 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES RETANGULARES COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_y/L_x = 1,5$	42
4.1.3 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES RETANGULARES COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_y/L_x = 2$	52
4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A UTILIZAÇÃO DA ANALOGIA DE GRELHA EM LAJES MACIÇAS	61
5 MODELAMENTO DE LAJES NERVURADAS	63
5.1 MODELOS BASEADOS NA TEORIA DAS PLACAS.....	63
5.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	69
5.3 ANALOGIA DE GRELHA PARA AS LAJES NERVURADAS.....	75
5.3.1- MODELAGEM.....	76
5.3.2- PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS	76
5.3.3- CARREGAMENTO	80
6 EXEMPLOS DE MODELAGEM	82
6.1 LAJES NERVURADAS DISCRETIZADAS POR ANALOGIA DE GRELHA. 82	
6.1.1 LAJES QUADRADAS	82
6.1.1.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4	89
6.1.1.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA AS ANÁLISES REALIZADAS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4.....	92
6.1.1.3 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4	106
6.1.2 LAJES RETANGULARES.....	119
6.1.2.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 5	121
6.1.2.2 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 5	122
6.1.2.3 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 6	125
6.1.2.4 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 6	126
6.1.2.5 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EXEMPLOS 5 E 6.....	127

6.1.3 LAJE RETANGULAR DE MAIORES DIMENSÕES.....	132
6.1.3.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 7	135
6.1.3.2 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 7	139
6.1.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 7	140
6.2 VIGA T DISCRETIZADA INTEIRAMENTE POR ELEMENTOS FINITOS .	143
6.3 LAJES NERVURADAS DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS..	146
6.3.1 MODELOS ESTUDADOS	155
6.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	158
7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	168
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	173
9. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	177

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Elemento infinitesimal dx, dy , sujeito a uma carga distribuída p , JAWAD (1994)	12
Figura 2.2 – Momentos fletores, torsões e esforços cortantes em um elemento de placa infinitesimal dx, dy	13
Figura 2.3 - Grelha plana, COELHO (2000)	18
Figura 2.4 – Graus de liberdade de uma barra de grelha ,COELHO(2000)	19
Figura 2.5 – Geometria de uma laje nervurada com os eixos de referência, KENNEDY & BALI (1978).....	23
Figura 2.6 –Seção transversal considerada na laje nervurada, mostrando suas subdivisões, KENNEDY & BALI (1978).....	23
Figura 3.1- (a) Laje maciça; (b) grelha equivalente, HAMBLY (1976)	26
Figura 3.2 – Carregamento nos nós – carga nodal P – e carregamento nas barras – carga uniformemente distribuída q	30
Figura 4.1- Distribuição de tensões devido à torção, HAMBLY (1976)	31
Figura 4.2- Torção em uma laje como se fosse viga, HAMBLY (1976).....	32
Figura 4.4– Laje discretizada com grelha de 45x45 cm	35
Figura 4.5 – Laje discretizada com grelha de 36x36 cm	35
Figura 4.7 – Laje discretizada com grelha de 10x10 cm	36
Figura 4.8– Laje discretizada com grelha de 5x5 cm	36
Figura 4.9 – Momentos fletores $m_x=m_y$ em função da grelha.....	37
Figura 4.10 – Flechas em função da grelha	37
Figura 4.11 – Momentos fletores ($m_x=m_y$) em função da grelha	39
Figura 4.12 – Momentos fletores ($m_{ex}=m_{ey}$) em função da grelha	39
Figura 4.13 – Flechas em função da grelha	40
Figura 4.14 – Momentos fletores ($m_x=m_y$) em função da grelha	41
Figura 4.15 – Momentos fletores ($m_{ex}=m_{ey}$) em função da grelha	41
Figura 4.16 – Flechas em função da grelha	42
Figura 4.17 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha	43
Figura 4.18 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	44
Figura 4.19 – Flechas em função da grelha	44

Figura 4.20 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha	45
Figura 4.21 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	46
Figura 4.22 – Momentos fletores (m_{ex}) em função da grelha	46
Figura 4.23 – Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha	47
Figura 4.24 – Flechas em função da grelha	47
Figura 4.25– Momentos fletores (m_x) em função da grelha	49
Figura 4.26 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	49
Figura 4.27 – Momentos fletores (m_{ex}) em função da grelha	50
Figura 4.28 – Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha	50
Figura 4.29 – Flechas em função da grelha	51
Figura 4.30 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha	53
Figura 4.31 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	53
Figura 4.32 – Flechas em função da grelha	54
Figura 4.33 – Momento fletores (m_x) em função da grelha	55
Figura 4.34 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	55
Figura 4.35 – Momentos fletores (m_{ex}) em função da grelha	56
Figura 4.36 – Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha	56
Figura 4.37 – Flechas em função da grelha	57
Figura 4.38 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha	58
Figura 4.39 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha	58
Figura 4.40 – Momentos fletores (m_{ex}) em função da grelha	59
Figura 4.41– Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha	59
Figura 4.42– Flechas em função da grelha	60
Figura 4.43 - Momentos fletores para a barra central da laje com grelha de 80 x 80 cm	61
Figura 5.1 – Largura da mesa de compressão, FRANÇA & FUSCO (1997)	65
Figura 5.2- Transformação da laje nervurada em laje maciça equivalente, BARBIRATO (1997)	69
Figura 5.3 – Influência da flexão da mesa da laje nervurada, na torção das nervuras, HAMBLY (1976)	70

Figura 5.4 – Laje nervurada, onde mesa e nervuras são discretizadas por elementos finitos de casca (SHELL), com os eixos globais indicados	73
Figura 5.5 – Coordenadas globais e locais dos elementos do SAP2000	73
Figura 5.6 – Esforços no elemento SHELL	74
Figura 5.7 – Malha da grelha para laje nervurada, HAMBLY (1976).....	76
Figura 6.1- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 30 cm	83
Figura 6.2 – Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 1	84
Figura 6.4 – Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 2	86
Figura 6.5- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 80 cm	87
Figura 6.7- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 100 cm	88
Figura 6.9 – Momentos fletores atuantes na laje apoiada em quatro lados	93
Figura 6.10 – Momentos fletores atuantes na laje com 1 lado engastado	95
Figura 6.11– Momentos fletores atuantes na laje com 2 lados engastados.....	98
Figura 6.12 – Momentos fletores atuantes na laje com 3 lados engastados.....	100
Figura 6.13 – Momentos fletores atuantes na laje com 4 lados engastados.....	103
Figura 6.14 – Diferenças percentuais encontradas entre as análises 2 e 1 para os momentos fletores e flechas (caso 1).....	107
Figura 6.15 – Diferenças percentuais encontradas entre as flechas obtidas através da análise 2 e do modelo de placa calculado pela teoria da elasticidade	114
Figura 6.16 – Diferenças percentuais encontradas entre as análises 8 e 7 para os momentos fletores e flechas.....	117
Figura 6.17 – Diferença entre as análises $A1(J)$ e $A7(20X50, J)$ para os momentos fletores máximos considerando a laje apoiada em 4 lados	118
Figura 6.18 – Diferença entre as análises $A1(J)$ e $A7(20X50, J)$ para as flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados.....	118
Figura 6.19- Laje nervurada retangular com relação entre os lados de 1,5 e com distância livre entre nervuras igual a 50 cm	119
Figura 6.21- Laje nervurada retangular com relação entre os lados de 2 e com distância livre entre nervuras igual a 50 cm	123
Figura 6.22- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 6 .	124

Figura 6.23- Laje nervurada retangular com distância livre entre nervuras igual a 50 cm	132
Figura 6.24- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 7 .	134
Figura 6.25 –Laje nervurada entendida em programas de Elementos Finitos (Capeamento no eixo da nervura), MELO & FONTE (2000).....	135
Figura 6.26 –Laje nervurada como deve ser entendida em programas de Elementos Finitos (nervura com seção T), MELO & FONTE (2000)	135
Figura 6.28 – (a) Viga T apoiada em todos os nós da alma; (b)apoiada no nó superior da alma e na mesa; (c)apoiada no nó central da alma.....	144
Figura 6.29 - Laje nervurada do exemplo 1 discretizada inteiramente por elementos finitos	146
Figura 6.30 – Parte do bordo da laje nervurada do exemplo 1.....	147
Figura 6.31 – (a) Laje apoiada somente nos nós inferiores; (b) laje apoiada nos nós superiores; (c) laje apoiada em todos os nós do contorno	147
Figura 6.32 - Seção T da laje do exemplo 1, com diagrama de tensões atuantes na mesa e na nervura central da laje	150
Figura 6.33 - Laje nervurada do exemplo 2 discretizada inteiramente por elementos finitos.	151
Figura 6.34- Laje nervurada do exemplo 3 discretizada inteiramente por elementos finitos.	152
Figura 6.35 - Laje nervurada do exemplo 4 discretizada inteiramente por elementos finitos	154
Figura 6.36 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje nervurada do modelo 1 em EF(do bordo esquerdo até o centro da laje)	158
Figura 6.37 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 1, do modelo 2 em EF(do bordo esquerdo até o centro da laje).....	159
Figura 6.38 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 1, do modelo 3 em EF(do bordo esquerdo até o centro da laje).....	159
Figura 6.39 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 3, do modelo 3 em EF(do bordo esquerdo até o centro da laje).....	160

Figura 6.40 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos e flechas obtidos pelos modelos $M1(J)$ e $M2(1\%J)$	161
Figura 6.41 - Diferenças percentuais entre as flechas obtidas pelo modelo $M2(1\%J)$ e o cálculo como placa pela teoria da elasticidade($A12(TE-CZERNY)$)	162
Figura 6.42 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos fletores e flechas obtidos pelo modelo 1(elementos finitos) e análise 1(analogia de grelha)	163
Figura 6.43 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos fletores e flechas obtidos pelo modelo 2 (elementos finitos) e análise 2 (analogia de grelha)	164
Figura 6.44 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos fletores e flechas obtidos pelo modelo 3 (elementos finitos) e análise 7 (analogia de grelha)	164
Figura 6.45 - Resultados dos momentos fletores obtidos pela análise $A1(J)$ (analogia de grelha com J calculado pela eq. 5.7), análise $A4(J)$ K&B (analogia de grelha com J calculado pela eq. 2.43) e pelo modelo $M1(J)$ (elementos finitos)	166
Figura 6.46 - Resultados das flechas obtidas pela análise $A1(J)$ (analogia de grelha com J calculado pela eq. 5.7), análise $A4(J)$ K&B (analogia de grelha com J calculado pela eq. 2.43) e pelo modelo $M1(J)$ (elementos finitos).....	167

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Coeficiente δ em ausência de rigidez à torção (HANN,1972).....	66
Tabela 6.1 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1,considerando os 4 lados apoiados	93
Tabela 6.2 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2,considerando os 4 lados apoiados	94
Tabela 6.3 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3,considerando os 4 lados apoiados	94
Tabela 6.4 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4,considerando os 4 lados apoiados	95
Tabela 6.5 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 1 lado engastado..	96
Tabela 6.6 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 1 lado engastado..	96
Tabela 6.7 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 1 lado engastado..	97
Tabela 6.8 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 1 lado engastado..	97
Tabela 6.9 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 2 lados engastados	98
Tabela 6.10 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 2 lados engastados.....	99

Tabela 6.11 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 2 lados engastados.....	99
Tabela 6.12 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 2 lados engastados.....	100
Tabela 6.13 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 3 lados engastados.....	101
Tabela 6.14 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 3 lados engastados.....	101
Tabela 6.15 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 3 lados engastados.....	102
Tabela 6.16 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 3 lados engastados.....	103
Tabela 6.17 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando os 4 lados engastados.....	104
Tabela 6.18 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando os 4 lados engastados.....	104
Tabela 6.19 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando os 4 lados engastados.....	105
Tabela 6.20 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando os 4 lados engastados.....	105

Tabela 6.21 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados	108
Tabela 6.22–Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 1 lado engastado	108
Tabela 6.23 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 2 lados engastados	109
Tabela 6.24 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 3 lados engastados	109
Tabela 6.25 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com os 4 lados engastados.....	109
Tabela 6.26 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 1) multiplicados pelo fator $\delta = 1,71$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2.....	110
Tabela 6.27– Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 2) multiplicados pelos fatores $\delta_x = 1,32$ e $\delta_y = 1,51$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2	111
Tabela 6.28 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 3) multiplicados pelo fator $\delta = 1,30$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2.....	111
Tabela 6.29 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 4) multiplicados pelos fatores $\delta_x = 1,23$ e $\delta_y = 1,18$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2	112
Tabela 6.30 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 5) multiplicados pelo fator $\delta = 1,16$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2.....	112

Tabela 6.31 –Diferença entre as análises 1 e 4 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados (caso 1)...	115
Tabela 6.32 –Diferença entre as análises 1 e 4 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando a laje com 2 lados engastados (caso 3)	116
Tabela 6.33 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 5.....	122
Tabela 6.34 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 6.....	126
Tabela 6.35 –Diferença entre as análises 2 e 1 para os momentos fletores e flechas máximas.....	127
Tabela 6.36 –Diferença entre a análise 1 e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas.....	127
Tabela 6.37 – Diferença entre a análise 1 e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas.....	127
Tabela 6.38 –Diferença entre as análises 8 e 7 para os momentos fletores e flechas máximas considerando as lajes com os 4 lados apoiados.....	128
Tabela 6.39 –Diferença entre as análises 1 e 7 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando as lajes com os 4 lados apoiados.....	128
Tabela 6.40 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade multiplicados pelo fator $\delta = 1,44$ (para o exemplo 5) e $\delta = 1,24$ (para o exemplo 6) e a diferença percentual desses valores com a análise 2	129
Tabela 6.41 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 7	139
Tabela 6.42 – Diferença entre as análise 1 e 3, e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas da laje do exemplo 7	140
Tabela 6.43 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade multiplicados pelo fator $\delta = 1,69$ e a diferença percentual desses valores com a análise 3	141

Tabela 6.44 – Valores das flechas obtidas através do modelo 0 em EF e a análise 0 em analogia de grelha para o exemplo 1	148
Tabela 6.45 – Valores das flechas obtidas através do modelo 1 em EF e a análise 1 em analogia de grelha para o exemplo 1	149
Tabela 6.46 – Diferenças percentuais obtidas entre as flechas dos modelos 1 e 0 em EF, e entre as análises 0 e 1 em analogia de grelha para o exemplo 1	149
Tabela 6.47 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 1, para os 3 modelos analisados.....	156
Tabela 6.48 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 2, para os 3 modelos analisados.....	156
Tabela 6.49 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 3, para os 3 modelos analisados.....	157
Tabela 6.50 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 4, para os 3 modelos analisados.....	157
Tabela 6.51 – Resultado das armaduras calculadas para a seção T central da laje do exemplo 1, levando em consideração os momentos fletores e resultantes normais	165

LISTA DE SÍMBOLOS

a	distância livre entre nervuras, cm
a_l	distância entre os eixos das nervuras, cm
b_f	largura da mesa colaborante, cm
b_w	largura da nervura, cm
d	altura útil da laje
D_v	rigidez à flexão da viga
D	rigidez à flexão da placa
E	módulo de elasticidade ou módulo de Yong, MPa
E_{cs}	módulo de elasticidade ou módulo de Yong do concreto, MPa
E_{ci}	módulo de elasticidade tangente inicial do concreto, MPa
f	flecha, cm
$\{F\}$	vetor de cargas externas aplicadas nos nós
$\{Fo\}$	vetor de esforços de imobilização dos nós
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão, MPa
G	módulo de elasticidade transversal, MPa
h_f	altura da mesa, cm
h_{eq}	altura da laje maciça equivalente, cm
I	momento de inércia da seção, cm^4
J	momento de inércia à torção, cm^4
$[K]$	matriz de rigidez
L	comprimento da barra, cm
M_x	momento fletor na direção x, kN.m por nervura
m_x	momento fletor na direção x, kN.m/m
M_y	momento fletor na direção y, kN.m por nervura
m_y	momento fletor na direção y, kN.m/m
M_{xy}	momento torsor, kN.m por nervura
m_{xy}	momento torsor, kN.m/m
M_{ex}	momento fletor no engaste na direção x, kN.m por nervura

m_{ex}	momento fletor no engaste na direção x, kN.m/m
M_{ey}	momento fletor no engaste na direção y, kN.m por nervura
M_{ey}	momento fletor no engaste na direção y, kN.m/m
n	número de bordos engastados
N_x	esforço normal de membrana na direção x, kN/m
N_y	esforço normal de membrana na direção y, kN/m
N_{xy}	esforço cortante no plano xy, kN/m
Q_x	esforço cortante na direção x, kN/m
Q_y	esforço cortante na direção y, kN/m
p	ação aplicada perpendicularmente ao plano da laje, kN/m ²
w	deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje, cm
y_{cg}	centro de gravidade medido a partir da face superior da seção
α	coeficiente que leva em conta o fck na determinação da altura útil da laje nervurada
ε_x	deformação específica na direção x
ε_y	deformação específica na direção y
ν	coeficiente de Poisson
δ	coeficiente multiplicador dos momentos fletores da placa para desprezar a rigidez à torção
$[\delta]$	matriz de deslocamentos
σ_x	tensão normal na direção x, kN/m ²
σ_y	tensão normal na direção y, kN/m ²
τ_{xy}	tensão de cisalhamento, kN/m ²
γ_{xy}	distorção angular no plano xy

RESUMO

Este trabalho aborda aspectos da análise elástico-linear de lajes nervuradas de concreto armado através do modelo de analogia de grelha, o qual apresenta algumas vantagens em relação a outros métodos numéricos.

São abordados alguns parâmetros que podem influenciar os resultados das análises, dando ênfase ao estudo do coeficiente de rigidez à torção, no modelo de analogia de grelha, e ao espaçamento entre nervuras da laje nervurada.

Os resultados obtidos pelo modelo de analogia de grelha são comparados com os resultados obtidos calculando a laje nervurada como placa pela teoria da elasticidade, conforme permite a NBR-6118/78, e com o modelo tridimensional em elementos finitos.

São apresentados exemplos de lajes quadradas e retangulares, com diferentes espaçamentos entre nervuras e diversas condições de apoio, inclusive considerações das lajes apoiadas em bordos indeslocáveis ou em vigas.

ABSTRACT

This work deals with some aspects of the linear elastic analysis of rib reinforced concrete slabs by means of the grillage analogy model. This model shows some advantages as compared to other numeric methods.

A few parameters that influence the analytical results were investigated, giving emphasis on the study of the coefficient of torsional rigidity, for the grillage analogy model and also on the spacing between the ribs of the rib reinforced concrete slab.

The results obtained by means of the grillage analogy model are compared with the results obtained calculating the rib slab as a plate, using elasticity theory, as allowed by the NBR-6118/78, and also with a tridimensional finite element model.

Examples of square and rectangular slabs are presented, with different spacing between ribs and several boundary conditions, including considerations of rigid supports or flexible beams.

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

A escolha do tipo de laje a ser utilizada nas construções, cabe ao projetista, o que é em geral feito em função de sua experiência profissional, de forma que satisfaça plenamente critérios arquitetônicos, de segurança e de economia.

Após definido o tipo de laje a ser utilizada, a determinação da espessura é feita baseando-se nos critérios dos estados limites de utilização, ou seja, de forma a se evitar grandes deformações ou que elas vibrem excessivamente, ocasionando sensação de desconforto.

Dessa forma, um dos fatores que influencia diretamente a espessura das lajes de concreto armado é o vão a ser vencido pelas mesmas. Sendo assim, para grandes vãos, a espessura das lajes maciças pode atingir valores elevados, sendo que grande parte de sua capacidade resistente seria utilizada para combater as solicitações devidas ao peso próprio, tornando a estrutura antieconômica.

Torna-se necessário, então, reduzir o peso próprio da laje. Isto pode ser obtido através da eliminação de parte do concreto que se encontra abaixo da linha neutra, ou seja, que está sendo tracionado. Como em estruturas de concreto armado costuma-se desprezar a resistência à tração do concreto, suas principais finalidades na zona tracionada seriam de proteger a armadura tracionada e fazer com que a estrutura trabalhe monoliticamente.

Ao se retirar parte do concreto tracionado, deixando apenas algumas faixas onde estarão agrupadas as armaduras tracionadas, garantindo o cumprimento das finalidades citadas anteriormente, surge o conceito de nervura e conseqüentemente laje nervurada.

Lajes nervuradas são definidas, conforme a NB-1/78, como sendo “as lajes cuja zona de tração é constituída por nervuras entre as quais podem ser postos materiais inertes de modo a tornar plana a superfície externa”.

A Norma Brasileira NBR-6118/78, vigente atualmente, permite, desde que sejam seguidas algumas recomendações quanto ao pré-dimensionamento, que os esforços e deslocamentos dessas lajes sejam calculados como se

fossem placas em regime elástico. Dessa forma a laje nervurada pode ser analisada como se fosse uma laje maciça de mesma rigidez à flexão. Entretanto este procedimento tem fornecido resultados insatisfatórios em diversos casos.

Nesse contexto surge a necessidade de se avaliar o comportamento dessas lajes por modelos mais precisos. Entre os métodos numéricos, dois se destacam para avaliar o pavimento de forma integrada: o dos elementos finitos e o da analogia de grelha. Além do modelo de analogia de grelha ser mais fácil de ser assimilado pelos projetistas quando comparado com o modelo em elementos finitos, o mesmo parece representar bem as lajes nervuradas, onde as barras da grelha são as próprias nervuras da laje.

1.2 HISTÓRICO

“Estudando a evolução das construções na civilização ocidental, sob o ponto de vista das lajes, percebe-se que o homem precisou de milhares de anos para criar pisos acima do solo”.(NAPPI,1993)

Primeiramente eram utilizados os materiais disponíveis na natureza, como a madeira e a pedra, sendo o cimento descoberto somente por volta de 1845. Algum tempo depois surgiu a idéia de associar o ferro ao cimento, com o intuito de torná-lo mais resistente aos esforços de tração. Sendo que apenas em 1920 esse novo material passou a chamar-se concreto armado.

Os primeiros edifícios com estruturas de concreto armado foram concebidos com lajes maciças.

Nos edifícios de pisos múltiplos, de acordo com FRANÇA & FUSCO (1997), a utilização de pavimentos em lajes maciças pode resultar num consumo de quase dois terços do volume total da estrutura.

NAPPI (1993) cita que com o objetivo de eliminar o concreto onde ele não é solicitado, reduzindo-se, conseqüentemente, o custo de execução, foi criada uma alternativa construtiva para as lajes, através da utilização de nervuras de concreto armado na face inferior das mesmas, com a permanência

de uma camada de concreto na superfície superior. Entre estas nervuras pode ou não existir algum material, visto que não deve existir esforço algum sobre ele. Esse tipo de laje é denominada laje nervurada.

A laje nervurada, conforme FRANÇA & FUSCO (1997), é uma evolução natural da laje maciça, resultando da eliminação da maior parte do concreto abaixo da linha neutra, o que permite o aumento econômico da espessura total das lajes pela criação de vazios em um padrão rítmico de arranjo, ou com a utilização de material inerte que não colabore com a resistência da laje.

Embora as vantagens das lajes nervuradas fossem reconhecidas, já há bastante tempo, o meio técnico apresentou resistência ao seu emprego, principalmente em relação às lajes nervuradas bidirecionais, em virtude do alto consumo de formas necessárias à sua execução. Hoje, porém, este panorama está totalmente modificado. O desenvolvimento tecnológico que levou à criação de novos materiais, como as armaduras treliçadas, os blocos leves de EPS (poliestireno expandido) e as formas plásticas aplicadas especialmente à produção de lajes nervuradas, tornou o emprego dessas lajes uma solução bastante utilizada atualmente nas estruturas de edifícios de múltiplos pisos.

Segundo KLEIN & SELISTRE (1997), os esforços em uma laje nervurada ocorrem de maneira relativamente complexa e não existem métodos simples de cálculo que levem em consideração a atuação de cada esforço, nem é totalmente conhecida a maneira como eles atuam nas lajes.

Na verdade a laje nervurada apresenta um comportamento intermediário entre placa e grelha, que depende do espaçamento das nervuras e das espessuras da mesa e da nervura. Portanto, o cálculo dos esforços solicitantes e deslocamentos das lajes nervuradas tem sido feito utilizando-se métodos baseados na analogia das grelhas e na teoria das placas.

Durante muitos anos as lajes nervuradas foram calculadas conforme recomenda a NB-1/78: as lajes nervuradas podem ser calculadas como se fossem placas em regime elástico, desde que sejam seguidas algumas recomendações quanto ao pré-dimensionamento. Ou seja, as lajes nervuradas eram calculadas como lajes maciças, com o auxílio de Tabelas, por exemplo. Entretanto, ao se permitir essa simplificação, supõe-se que a laje nervurada vai apresentar a mesma rigidez à torção que a laje maciça equivalente, o que não

é verdade. Dessa forma os esforços e deslocamentos assim obtidos podem resultar bastante aquém dos reais.

Portanto, devido ao fato das nervuras apresentarem pequena rigidez à torção, existe um coeficiente δ (HANN, 1972) para corrigir os esforços obtidos para placas elásticas, quando se considera nula sua rigidez à torção. Para uma laje quadrada, simplesmente apoiada e solicitada por uma carga uniformemente distribuída, este coeficiente δ é igual a 1,71. Isto quer dizer que os esforços máximos na laje nervurada são 71% superiores aos esforços obtidos pela teoria das placas elásticas.

Atualmente, muitos projetistas que utilizam programas com elementos finitos para o cálculo de edifícios tratam os pavimentos em laje nervurada como se fossem lajes maciças de mesma rigidez à flexão.

Como exemplo pode-se citar o estudo feito por BARBIRATO(1997), onde a laje nervurada é transformada numa laje maciça equivalente, através de uma equivalência da inércia à flexão. Neste caso para não se considerar a rigidez a torção, foi feita a seguinte consideração: o módulo de deformação transversal do concreto, G , corresponde a 1% do valor calculado pela equação obtida através da teoria clássica da elasticidade.

Com o avanço dos recursos computacionais no cálculo estrutural, a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos de uma laje nervurada segundo a teoria das grelhas tornou-se bastante comum pelos engenheiros de estruturas.

Existem alguns estudos comparando os resultados obtidos por grelha e por elementos finitos (placa equivalente), dentre eles destaca-se BOCCHI Jr(1995) e BARBIRATO(1997), sendo que ambos concluíram que o modelo que melhor representa essa tipologia de pavimento é a analogia de grelha. Em BOCCHI Jr é considerada apenas 20% da rigidez à torção integral da seção T , enquanto no trabalho de BARBIRATO essa rigidez é praticamente desprezada, sendo considerada 1% da rigidez integral.

Em SELISTRE & KLEIN (2000), encontra-se um estudo experimental e numérico de deformações em uma laje nervurada. As análises numéricas foram feitas através de dois modelos computacionais distintos: um gerado com elementos finitos de placa no SAP90 e outro com elementos de grelha no GRELHA-TQS. A modelagem utilizando o SAP90 foi feita baseada no conceito

de rigidez equivalente à flexão na região nervurada. O modelo numérico do SAP90 levou em conta a rigidez à torção da laje, enquanto que o empregado no GRELHA-TQS desprezou sua influência. Com relação à análise experimental, o modelo reduzido foi confeccionado em microconcreto armado na escala 1:7,5. Os carregamentos previstos para a laje foram simulados através de uma altura equivalente de coluna d'água.

Inicialmente o ensaio foi de curta duração, pois assim que era atingido o nível d'água desejado, aguardava-se alguns minutos e uma vez realizadas as leituras dos instrumentos, passava-se, imediatamente, à etapa de carga seguinte. Concluídas as 15 etapas de carga do ensaio de curta duração, foi iniciado o ensaio de longa duração, que consistiu em acompanhar a evolução dos deslocamentos verticais do modelo submetido à carga de $7,5 \text{ kN/m}^2$ (75 cm de coluna d'água) durante 76 dias e, depois de descarregado, durante mais 14 dias.

Das análises dos resultados, os autores concluíram que o cálculo que melhor simulou o comportamento da estrutura, enquanto a laje apresentou comportamento aproximadamente elástico-linear, foi o que utilizou elementos finitos de placa, que foi o mais rígido, discretizado pelo SAP90. Entretanto à medida que a fissuração da laje evoluiu durante o ensaio, sua rigidez foi reduzida, e seu comportamento foi se aproximando do previsto pelo modelo numérico menos rígido, gerado com elementos de grelha no GRELHA – TQS. Já nos últimos estágios de carga, a fissuração do microconcreto foi tão intensa e abrangente, que nenhum dos dois modelos numéricos foi capaz de reproduzir seu comportamento elasto-plástico.

MELO & FONTE (2000) também fizeram um estudo comparando modelos numéricos e experimental de uma laje nervurada sem vigas, apoiada diretamente sobre pilares. Nesse caso a laje foi analisada pelo método dos elementos finitos e pela analogia de grelha. A melhor representação obtida para os momentos foi a de elementos de barra para as nervuras e elementos de placa para o capeamento, as faixas sólidas e os ábacos; sendo a região dos pilares composta por placas de grande rigidez. No modelo de elementos finitos com placas de espessura equivalente representando as nervuras, os resultados, de um modo geral, principalmente nas faixas de pilares, foram menos satisfatórios que os do modelo anterior. O modelo da analogia de grelha

apresentou bons resultados em regiões de nervuras, contudo em regiões de ábacos e faixas sólidas, seus resultados de momentos não foram muito adequados. Com relação aos deslocamentos, tanto o modelo em analogia de grelha quanto o modelo em elementos finitos apresentaram bom desempenho.

A fim de proporcionar uma melhor simulação do comportamento real da estrutura, OLIVEIRA et al (2000) analisam os deslocamentos de uma laje nervurada através da inclusão da não-linearidade física do material concreto armado, em modelos teóricos, programáveis através do método dos elementos finitos. Para a análise em regime elástico linear foram utilizados dois modelos de cálculo: o de grelha e o de laje maciça equivalente. Em cada um desses modelos foram feitas duas considerações distintas quanto a rigidez à torção: uma primeira considerando toda a rigidez à torção dos elementos estruturais e outra desprezando-a. Na análise não-linear a rigidez à torção não foi reduzida. As principais observações feitas, baseadas nos resultados obtidos, foram que: em regime linear, tanto o modelo de grelha quanto o de laje equivalente apresentaram resultados próximos entre si; os resultados de deslocamentos obtidos com o emprego dos modelos não lineares ficaram mais próximos dos resultados experimentais do que os obtidos por modelos elásticos lineares, os quais ficaram, a partir de um determinado valor de carregamento, bastante aquém em relação aos experimentais.

DIAS, GIONGO & PAIVA (2001) fizeram análises numéricas de uma laje nervurada sem vigas considerando diferentes modelos mecânicos: grelha da laje nervurada, laje maciça equivalente (com equivalência da inércia à flexão) e grelha das nervuras + placas dos capitéis. Os resultados desses modelos foram comparados com os obtidos através da execução de um modelo experimental reduzido, na escala 1/7,5, em microconcreto armado. Os modelos em grelha consideraram as barras como seção T e foi considerada 15% da rigidez à torção bruta da seção. Já no modelo de laje maciça equivalente não houve a consideração de redução da rigidez à torção. Foram aplicadas 14 etapas de carga e descarga, sendo feito, em cada uma delas, o registro dos valores experimentais das deformações e deslocamentos lineares. Eles puderam constatar através das análises que os deslocamentos numéricos obtidos, a cada etapa de carga, para todos os modelos analisados, apresentaram uma discrepância com os valores experimentais. A principal

razão para tal fato, segundo eles, é que o cálculo fora feito em regime elástico linear, enquanto o modelo experimental é em microconcreto armado, apresentando, portanto, comportamento não linear. Verificaram, também, que os resultados numéricos fornecidos pelo modelo de grelha foram os que mais se aproximaram dos experimentais, ou seja, neste modelo a estrutura comportou-se com maior flexibilidade; já o modelo de laje maciça equivalente comportou-se com maior rigidez, apresentando as maiores diferenças.

DIAS, GIONGO & PAIVA (2002) visando obter resultados mais realistas das lajes nervuradas, apresentaram resultados de deslocamentos em modelos teóricos que consideram a excentricidade existente entre os eixos da nervura e o plano médio da capa. Este modelo simula a capa por elementos finitos de casca plana e as nervuras por elementos de barra tridimensional que permitem a criação de offsets rígidos para definir a localização exata do centróide da seção em relação à localização do nó do elemento no modelo. Os resultados desse modelo são comparados com resultados de modelos simplificados como o modelo de grelha e o modelo de laje maciça equivalente, e também com resultados experimentais de lajes nervuradas em concreto armado, em escala $\frac{1}{4}$ apresentadas por ABDUL-WAHAB & KHALIL (2000) apud DIAS, GIONGO & PAIVA (2002). Apesar de que nem para todos os níveis de carga, o modelo com offset rígido ter sido o que obteve os resultados mais próximos dos experimentais, o que os autores concluíram foi que este modelo é o que apresenta os melhores resultados na fase elástica do material, e provavelmente também apresentaria na fase plástica, caso fossem feitas considerações mais realistas acerca do comportamento do material concreto armado, como a não-linearidade física, por exemplo.

1.3 JUSTIFICATIVA

A necessidade de minimização de custos e prazos aliada às exigências arquitetônicas, faz com que o uso de lajes nervuradas de grandes vãos nos projetos de edifícios residenciais e comerciais, seja cada vez mais freqüente atualmente.

O emprego das lajes nervuradas é justificado pela vantagens estruturais que estas apresentam em relação às demais formas estruturais, como:

- Simplificação na execução da obra;
- Possibilidade de obtenção de teto plano, facilitando a limpeza, melhorando a ventilação e não limitando previamente os espaços;
- Viabilidade para vencer maiores vãos e suportar maiores cargas;
- Maior flexibilidade no posicionamento das paredes;
- Menor custo de materiais;
- Redução do peso próprio;
- Além de proporcionar uma excelente distribuição do carregamento atuante na laje.

Entre os modelos utilizados para avaliar o comportamento desse tipo de laje, se destaca o modelo de analogia de grelha, pois além de representar bem o funcionamento da laje nervurada, onde as barras da grelha coincidem com as nervuras da laje, também é fácil de ser utilizado e assimilado pelos engenheiros de estruturas.

Além disso, a analogia de grelha vem sendo muito utilizada em programas de projetos estruturais (principalmente por possuir uma formulação mais simples) e por isso se faz necessário um maior conhecimento deste método de cálculo, de suas considerações e implicações.

1.4 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal fornecer indicações para a análise de lajes nervuradas pelo processo de analogia de grelha, visando contribuir para o aprimoramento do cálculo estrutural. Com isto, pretende-se ampliar o conhecimento técnico sobre o comportamento mecânico desse tipo

de laje e contribuir para o aperfeiçoamento da Norma Brasileira NBR-6118, no que diz respeito à análise estrutural das lajes nervuradas.

Para que se consiga atingir esse objetivo principal, são necessários outros específicos:

- Estudar a rigidez à torção das nervuras;
- Avaliar a influência do espaçamento das nervuras nos resultados;
- Analisar a influência da discretização da mesa como elemento finito de placa;
- Estudar a influência das condições de apoio e da relação entre os lados das lajes nervuradas nos resultados obtidos;
- Fazer o estudo comparativo dos resultados obtidos pelo modelo de analogia de grelha e pelo modelo tridimensional em elementos finitos;

Comparar os resultados obtidos pelos modelos mencionados com aqueles que resultam quando se adota o procedimento de cálculo preconizado pela NBR-6118.

2 TEORIA DAS PLACAS E DAS GRELHAS

A laje é uma estrutura que apresenta continuidade nas duas direções de seu plano, de tal forma que uma carga aplicada na mesma deve ser suportada por uma distribuição bidirecional de forças cortantes, momentos fletores e torsores. Essas distribuições são consideravelmente mais complexas do que as que ocorrem em vigas com comportamento unidirecional.

Sabe-se que a laje nervurada é nada mais do que a composição de uma laje maciça (mesa, com comportamento bidirecional) com uma grelha de pequenas vigas (nervuras, apresentando comportamento unidirecional).

Além disso, já foi observado por alguns autores que quanto menor o espaçamento entre nervuras, mais o comportamento estático das lajes nervuradas se assemelha ao das placas elásticas e por outro lado, quanto maior for esse espaçamento, mais o comportamento da laje nervurada se aproxima de uma grelha.

Portanto é necessário que se apresente, neste trabalho, os fundamentos sobre a teoria das grelhas e da teoria elástica das placas (que inclusive serão utilizados em estudos comparativos com a analogia de grelha).

2.1 TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO

Placas podem ser definidas como estruturas planas, onde uma das dimensões é pequena quando comparada com suas outras duas, e que estão submetidas a cargas perpendiculares ao seu plano.

Define-se como altura h da placa, a menor das três dimensões e a superfície média como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento que determina a altura em cada ponto da placa.

(TIMOSHENKO, 1959).

O estudo das estruturas de superfície, no caso mais geral do regime elástico, deve ser feito pela Teoria da Elasticidade.

Porém, da mesma forma que as estruturas reticuladas podem ser estudadas adequadamente através de uma teoria simplificada, a Resistência dos Materiais, também as lajes podem ser estudadas através de uma teoria

simplificada, denominada de Teoria das Placas Delgadas. Esta teoria se baseia nas seguintes hipóteses, conhecidas como hipóteses de Kirchhoff-Love:

- O material da placa é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de HOOKE;
- A placa indeformada é plana;
- A espessura h é pequena em relação às demais dimensões;
- As tensões normais a superfície média são desprezíveis em relação às tensões no mesmo plano da mesma;
- Os pontos pertencentes à superfície média antes da deformação, encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada;
- Os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura da placa, sendo possível não considerar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de placa.

A equação diferencial de momento de uma viga

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{E I} \quad (2.1)$$

pode ser expressa em função de uma carga aplicada por :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x)}{E I} \quad (2.2)$$

A equação diferencial correspondente para a placa é mais complicada pois deve incluir termos para os momentos nas direções x e y , assim como os momentos torsores que também estão presentes nas placas. Primeiramente deve-se considerar um elemento de placa infinitesimal de dimensões dx , dy (Figura 2.1), sujeito a uma carga vertical $p(x,y)$. As forças e momentos, por unidade de comprimento, necessárias ao equilíbrio estão mostradas na Figura 2.2 e são positivas da forma como estão representadas. Da mesma forma, a deflexão é considerada positiva para baixo. É interessante observar que são necessárias duas forças cortantes, Q_x e Q_y , dois momentos fletores, M_x e M_y , e dois momentos torsores, M_{xy} e M_{yx} , para definir corretamente o equilíbrio de uma placa retangular.

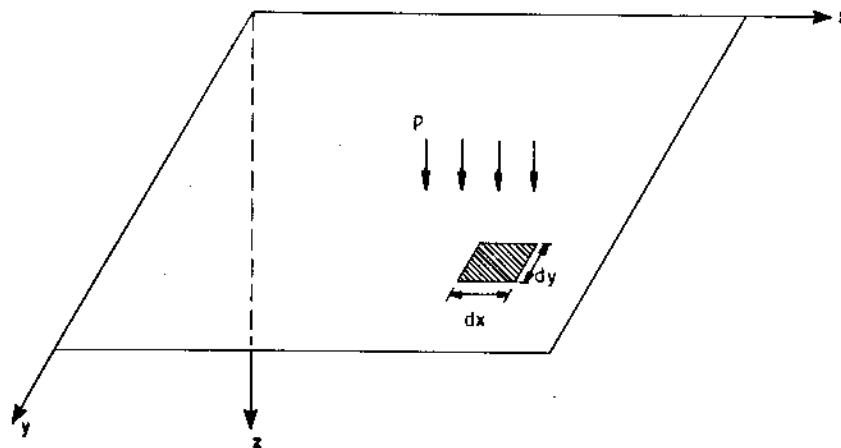


Figura 2.1 - Elemento infinitesimal dx, dy , sujeito a uma carga distribuída p ,
JAWAD (1994)

Como os valores dos momentos fletores, momentos torsores e esforços cortantes, dependem das coordenadas x e y , deve-se levar em consideração a variação que os mesmos vão sofrer ao longo dos comprimentos dx e dy como é mostrado na Figura 2.2.

Fazendo o somatório das forças na direção vertical (z), obtém-se a primeira equação de equilíbrio:

$$p(x, y) dx dy - Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad (2.3)$$

Que se reduz a:

$$p(x, y) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

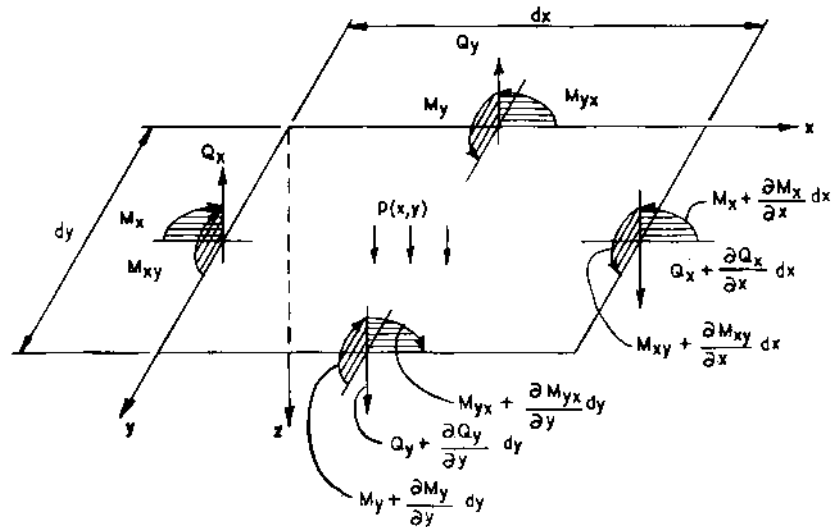


Figura 2.2 – Momentos fletores, torsões e esforços cortantes em um elemento de placa infinitesimal dx, dy

Fazendo o somatório dos momentos ao redor do eixo x , obtém-se a segunda equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 & My \, dx - \left(My + \frac{\partial My}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} \, dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \, dy \\
 & - Q_x \, dy \frac{dy}{2} + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + p \, dx \, dy \frac{dy}{2} = 0
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Simplificando e desprezando-se os termos de ordem superior, obtém-se:

$$Q_y = \frac{\partial My}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.6)$$

Fazendo o somatório dos momentos ao redor do eixo y , obtém-se a terceira equação de equilíbrio:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (2.7)$$

Substituindo as equações 2.6 e 2.7 em 2.4:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x,y) \quad (2.8)$$

Como em qualquer ponto da placa a tensão de cisalhamento $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, admite-se que $M_{xy} = -M_{yx}$, chegando-se a equação 2.9, que é a equação

diferencial de equilíbrio das placas. É importante observar que esta equação independe da placa estar em regime elástico ou plástico, do coeficiente de Poisson e do fato da placa ser isotrópica ou ortotrópica.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (2.9)$$

A partir da equação diferencial de equilíbrio das placas, utilizando-se as relações entre esforços e deslocamentos, baseado-se nas hipóteses de Kirchhoff-Love, a Teoria das Placas chega à equação diferencial de Lagrange, em coordenadas cartesianas retangulares:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (2.10)$$

Onde:

$$D = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

E = módulo de deformação do concreto;

h = altura da laje;

ν = coeficiente de Poisson do concreto;

p = carga por unidade de área, aplicada perpendicularmente ao plano da laje;

x, y = coordenadas cartesianas que indicam a posição de um ponto genérico da laje;

w = deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje;

Comparando a equação 2.2 de flexão de vigas com a equação 2.10, observa-se que esta última é consideravelmente mais complicada pois considera deflexões nas direções x e y , assim como os efeitos do cisalhamento no plano xy .

A integração da equação de Lagrange para as lajes retangulares pode ser feita através de vários processos, como a solução por séries simples (Fourier), séries duplas trigonométricas (Navier), além de existirem várias Tabelas na bibliografia nacional e internacional, como Czerny, Bares, entre outras, que fornecem os esforços e deslocamentos. Existem ainda muitos programas para computadores, que utilizando variados métodos, como o das diferenças finitas, método dos elementos finitos e método dos elementos de

cotorno, resolvem a equação de Lagrange. Os programas estão cada vez mais sendo utilizados, principalmente em lajes não retangulares ou com condições de contorno não encontradas nas Tabelas, ou quando deseja-se considerar o deslocamento vertical nos apoios, tendo em vista a deslocabilidade das vigas de borda, haja visto que as Tabelas consideram esses apoios fixos (sem deslocamentos verticais).

2.2 TEORIA DAS GRELHAS

Uma grelha é uma estrutura plana reticulada composta de membros contínuos que se interceptam ou se cruzam mutuamente, a qual está sujeita a cargas perpendiculares ao seu plano. Os esforços solicitantes nas grelhas são determinados por métodos conhecidos na estática das estruturas, entre eles o método dos esforços e o método dos deslocamentos.

Como normalmente para a resolução da estrutura através da análise matricial utiliza-se o método dos deslocamentos, devido ao seu melhor condicionamento para a programação, é interessante que se mostre aqui um estudo sobre este método e sua aplicação para grelhas planas.

2.2.1 MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

O método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez, é um método de análise de estruturas reticuladas que usa a rigidez dos elementos para formar um sistema de equações, determinando inicialmente os deslocamentos e indiretamente, por meio destes, os esforços.

O método da rigidez é bastante geral e pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de estrutura reticulada, isostática ou hiperestática.

Primeiramente a estrutura é modificada introduzindo fixações de forma a torná-la cinematicamente determinada, ou seja, fixam-se todos os graus de liberdade da estrutura. Em seguida, através das equações de equilíbrio de forças em torno destas fixações é obtido o sistema de equações que resolve o problema, sendo que as incógnitas são os deslocamentos das fixações. O número de equações será igual ao grau de indeterminação cinemática da estrutura, ou seja, igual ao número de graus de liberdade da mesma. Como, neste método, o único sistema principal possível é obtido através da fixação de

todos os graus de liberdade, desaparece o problema da escolha do sistema principal do Método das Forças, sendo este o motivo pelo qual o Método dos Deslocamentos é o mais adequado, e praticamente o único utilizado para implementação computacional em Análise Estrutural.

A equação básica do método é:

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (2.11)$$

Onde :

F = matriz coluna das ações atuantes na estrutura;

K = matriz de rigidez da estrutura;

δ = matriz coluna dos deslocamentos.

Segundo LORIGGIO (2000), a análise de uma estrutura pelo método dos deslocamentos pode ser descrita, matricialmente, pelas seguintes etapas:

1. Elaboração do modelo da estrutura. Escolha do sistema estrutural resistente, comportamento dos componentes da estrutura, vinculações, propriedades dos materiais, dimensões da estrutura, geometrias dos componentes, carregamentos e combinações de carregamento.
2. Definição e numeração do nós.
3. Definição da incidência e numeração das barras.
4. Cálculo da matriz de rigidez no sistema local $[r]$ para todas as barras da estrutura.
5. Cálculo da matriz de rigidez no sistema global $[R] = [T]^t \cdot [r] \cdot [T]$ para todas as barras da estrutura.

Onde :

$[T]$ = matriz de transformação do eixo local para o eixo global.

$[T]^t$ = transposta da matriz de rotação

6. Montagem da matriz $[K]$ da estrutura.
7. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós da cada barra no sistema local $\{S_o\}$.
8. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós da cada barra no sistema global $\{S_o\} = [T]^t \cdot \{S_o\}$.
9. Montagem do vetor de esforços de imobilização dos nós da estrutura $\{F_o\}$.

10. Montagem do sistema de equação da estrutura em relação aos graus de liberdade originais, vetor $\{\delta\}$ (deslocamentos), $\{F\}$ (ações nodais).
$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} - \{F_0\} \quad (2.12)$$
11. Reordenação do sistema de equações deixando as direções restringidas para o final.
12. Resolução do sistema de equações $[K_{LL}] \cdot \{\delta_L\} = \{F_L\}$, correspondentes às direções livres.
13. Separar de $\{\delta_L\}$ os deslocamentos $\{d\}$ de cada barra da estrutura.
14. Encontrar o vetor de reações de apoio nas direções restringidas.
15. Calcular os esforços solicitantes nas extremidades das barras no sistema global $\{S\} = [r] \cdot \{d\}$. Em seguida transforma-se os esforços para o sistema local $\{\underline{S}\}$.

Quando todos os deslocamentos e reações de apoio tiverem sido obtidos, a análise pode ser considerada como terminada.

2.2.2 GRELHAS PLANAS

Conforme já foi comentado, a grelha é uma estrutura plana composta de barras contínuas que se interceptam ou se cruzam mutuamente. Todas as barras e nós existem no mesmo plano, sendo que as barras estão rigidamente ligadas entre si.

A estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano. Entretanto as cargas da grelha atuam normalmente ao plano da mesma e todos os binários têm seus vetores, com seta dupla, no mesmo plano da grelha.

Os efeitos de flexão são predominantes nessa estrutura, porém os efeitos de torção são também importantes.

Para a modelagem e posterior obtenção dos resultados da grelha torna-se necessária a adoção de um sistema de coordenadas para a estrutura como um todo, que é conhecido como sistema de coordenadas globais da estrutura.

Na análise de uma estrutura de grelha, os eixos globais são tomados como mostrado na Figura 2.3.

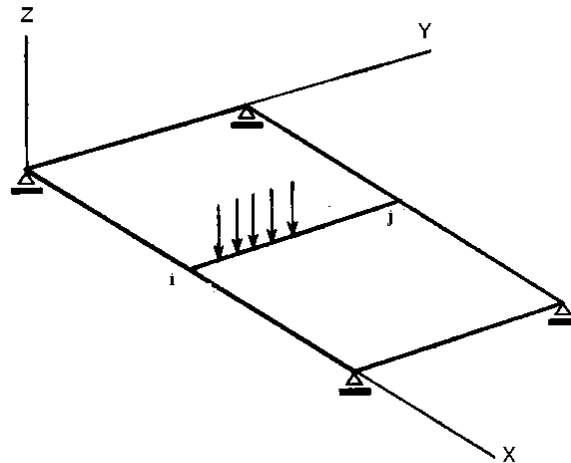


Figura 2.3 - Grelha plana, COELHO (2000)

A estrutura está contida no plano X-Y com todo o carregamento atuando na direção do eixo Z. As cargas na forma de binários têm seus vetores-momentos no plano X-Y.

Cada barra de grelha também possui um sistema de eixos cartesianos ortogonais próprio, conhecidos como eixos de coordenadas locais. Para o sistema local, os eixos denominados x, y e z estão dispostos da seguinte maneira:

- A direção do eixo x coincide com o eixo da barra e com o sentido orientado do nó inicial i para o nó final j.
- O eixo z é perpendicular ao plano da grelha, dirigido para cima.
- O eixo y é perpendicular ao plano formado pelos eixos x e z, com sentido positivo obedecendo a regra da mão direita.
- Supõe-se que o plano x - z para cada membro da grelha seja um plano de simetria (e por essa razão um plano principal de flexão).
- Considera-se grau de liberdade de um elemento estrutural a soma da quantidade de movimentações que cada apoio pode ter. No caso em questão, duas rotações e uma translação podem ser observadas em cada nó, o que nos dá um total de seis graus de liberdade por barra. Os graus de liberdade (deslocamentos possíveis) podem ser observados na Figura 2.4 abaixo. A razão para numerar os giros antes das translações

em cada nó é para manter uma analogia com a análise de um pórtico plano.

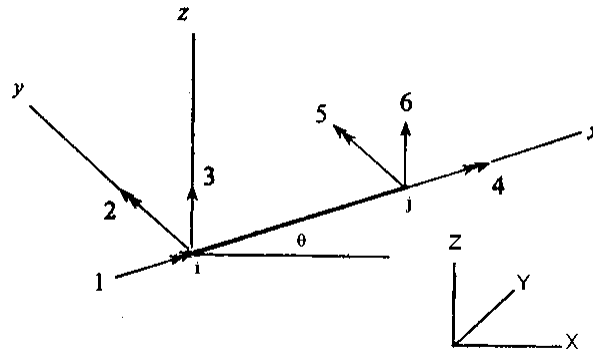


Figura 2.4 – Graus de liberdade de uma barra de grelha ,COELHO(2000)

Vale salientar, então, que os esforços solicitantes são:

- Momento fletor (em torno do eixo 2);
- Momento torsor (em torno do eixo 1);
- Esforço cortante (paralelo ao eixo 3).

Os coeficientes da matriz de rigidez da barra da grelha podem ser obtidos seguindo o procedimento explicitado anteriormente na descrição do método dos deslocamentos, ou seja, a barra deve ser totalmente restringida e devem ser aplicados deslocamentos unitários nesses seis graus de liberdade, um de cada vez. As reações que surgem devido a esses deslocamentos unitários são os coeficientes de rigidez da barra. Ao serem agrupados, esses coeficientes de rigidez, vão formar uma matriz de ordem 6x6 (6 graus de liberdade) que é a chamada “matriz de rigidez” da barra da grelha (no sistema local). Esses coeficientes estão mostrados na equação 2.13.

$$S_L = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal

G = módulo de elasticidade transversal

J = momento de inércia à torção da barra da grelha

I_Y = momento de inércia à flexão da seção da barra em relação ao eixo y

L = comprimento da barra

Em seguida deve-se fazer a transformação da matriz de rigidez em relação aos eixos locais para os eixos globais, que segue o mesmo modelo que para um pórtico plano e está mostrada na equação 2.14.

$$S_G = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L}C_x^2 + \frac{4EI_Y}{L}C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_Y}{L}\right)C_xC_y & \frac{6EI_Y}{L^2}C_y & -\frac{GJ}{L}C_x^2 + \frac{2EI_Y}{L}C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_Y}{L}\right)C_xC_y & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_Y}{L}\right)C_xC_y & \frac{GJ}{L}C_y^2 + \frac{4EI_Y}{L}C_x^2 & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_Y}{L}\right)C_xC_y & -\frac{GJ}{L}C_y^2 + \frac{2EI_Y}{L}C_x^2 & \frac{6EI_Y}{L^2}C_x \\ \frac{6EI_Y}{L^2}C_y & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_x & \frac{12EI_Y}{L^3} & \frac{6EI_Y}{L^2}C_y & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_x & -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L}C_x^2 + \frac{2EI_Y}{L}C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_Y}{L}\right)C_xC_y & \frac{6EI_Y}{L^2}C_y & \frac{GJ}{L}C_x^2 + \frac{4EI_Y}{L}C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_Y}{L}\right)C_xC_y & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_y \\ -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_Y}{L}\right)C_xC_y & -\frac{GJ}{L}C_y^2 + \frac{2EI_Y}{L}C_x^2 & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_Y}{L}\right)C_xC_y & \frac{GJ}{L}C_y^2 + \frac{4EI_Y}{L}C_x^2 & \frac{6EI_Y}{L^2}C_x \\ -\frac{6EI_Y}{L^2}C_y & \frac{6EI_Y}{L^2}C_x & -\frac{12EI_Y}{L^3} & -\frac{6EI_Y}{L^2}C_y & \frac{6EI_Y}{L^2}C_x & \frac{12EI_Y}{L^3} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde (Figura 2.6) :

$$C_x = \cos \theta \quad \text{e} \quad C_y = \sin \theta \quad (2.15) \text{ e } (2.16)$$

A próxima etapa seria então a análise da estrutura sujeita a cargas.

Nesta análise formam-se os vetores associados às cargas aplicadas sobre a

grelha. As cargas externas aplicadas nos nós, juntamente com as reações de apoio, constituem o vetor $\{F\}$. Já as cargas atuantes ao longo da barra da grelha vão ser substituídas por ações nas extremidades da barra restringida da grelha, através das quais vai ser obtido o vetor de mobilização dos nós de toda a estrutura $\{F_o\}$.

Superpondo essas duas ações obtém-se as ações totais nas extremidades do elemento: $\{F\} - \{F_o\}$

Substituindo essas matrizes na equação 2.12, obtém-se a solução para os deslocamentos nodais e para as reações de apoio.

As ações nas extremidades das barras $\{S\}$ para o sistema global, podem ser obtidas com a equação:

$$\{S\} = [r] \cdot \{d\} + \{S_o\} \quad (2.17)$$

e transformadas para o eixo local:

$$\{\underline{S}\} = [T] \cdot \{S\} \quad (2.18)$$

2.3 LAJES NERVURADAS

Como já foi dito anteriormente, a laje nervurada é constituída por um conjunto de vigas (nervuras), solidarizadas entre si pela mesa, apresentando um comportamento estático intermediário entre placa e grelha.

Segundo KENNEDY & BALI (1978) a equação diferencial para o deslocamento w de uma laje nervurada de concreto armado pode ser deduzida a partir das equações que regem uma grelha e uma laje maciça ortotrópica. Essas equações são expressas respectivamente por :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (c_x + c_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (2.19)$$

e

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (2.20)$$

onde

D_x e D_y são as rigidezes à flexão da grelha, ou da laje maciça ortotrópica;

c_x e c_y são as rigidezes à torção da grelha;

e D_{xy} e D_{yx} são as rigidezes à torção da laje maciça ortotrópica;

D_1 e D_2 são as rigidezes devido ao efeito de Poisson associadas aos momentos fletores nas direções x e y, respectivamente.

ROWE (1962) demonstrou que fazendo:

$$c_x + c_y = 2 \alpha \sqrt{D_x D_y} = D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2 \quad (2.21)$$

as equações (2.19) e (2.20) podem ser combinadas para formar a equação que rege uma laje nervurada da seguinte forma:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \alpha \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (2.22)$$

O coeficiente α é um parâmetro relativo à torção com um limite superior igual a 1 (para uma laje maciça ortotrópica) e um limite inferior igual a zero (para uma grelha com membros sem rigidez à torção).

a) RIGIDEZ À FLEXÃO:

Baseando-se nas considerações feitas anteriormente, as rigidez à flexão D_x e D_y , assim como as rigidezes D_1 e D_2 , devido ao efeito Poisson, de uma seção não fissurada, podem ser expressas por:

$$D_x = D + \frac{E h \left(e_x - \frac{h}{2} \right)^2}{1 - \nu^2} + \frac{E I'_x}{\alpha_x} \quad (2.23)$$

$$D_y = D + \frac{E h \left(e_y - \frac{h}{2} \right)^2}{1 - \nu^2} + \frac{E I'_y}{\alpha_y} \quad (2.24)$$

$$D_1 = \nu D'_x \quad (2.25)$$

$$D_2 = \nu D'_y \quad (2.26)$$

onde $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ é a rigidez à flexão da mesa com relação ao seu plano

médio;

h é a espessura da mesa;

$\alpha_x(\alpha_y)$ é o espaçamento das nervuras nas direções x e y respectivamente;

$e_x(e_y)$ é a distância do topo da laje à L.N. nas direções x e y respectivamente;

$I_x'(I_y')$ é o momento de inércia das nervuras nas direções x e y respectivamente;

$D_x'(D_y')$ rigidez à flexão da mesa em relação a L.N. nas direções x e y respectivamente.

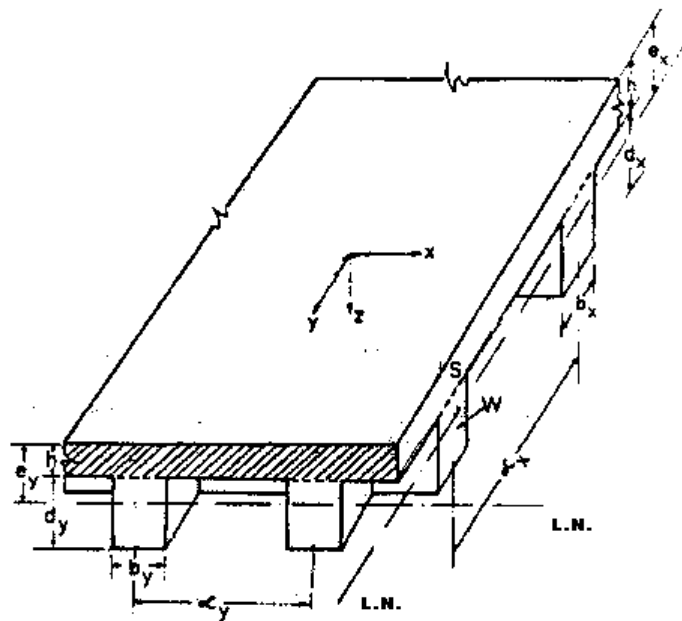


Figura 2.5 – Geometria de uma laje nervurada com os eixos de referência, KENNEDY & BALI (1978)

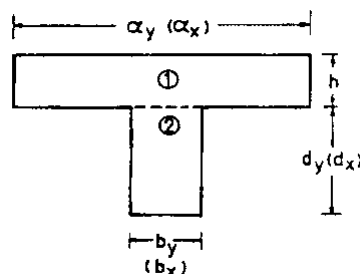


Figura 2.6 – Seção transversal considerada na laje nervurada, mostrando suas subdivisões, KENNEDY & BALI (1978)

b) RIGIDEZ À TORÇÃO

De acordo com KENNEDY & BALI, a rigidez à torção de uma seção não fissurada de uma laje nervurada de concreto armado deve ser calculada da seguinte forma:

Considerando a seção T mostrada na Figura 2.6 , as rigidezes à torção das seções retangulares 1 e 2 são calculadas e somadas para resultar na rigidez à torção final J. Portanto para uma seção normal ao eixo y (Figura 2.5) ,

$$J = J_1 + J_2 \quad (2.27)$$

Onde J_1 e J_2 são relativas às contribuições das áreas 1 e 2 respectivamente, definidas por:

$$J_1 = \frac{1}{2} \beta \alpha_y h^3 \quad (2.28)$$

$$J_2 = \beta d_y b_y^3 \quad \text{para } d_y \geq b_y \quad (2.29)$$

$$J_2 = \beta b_y d_y^3 \quad \text{para } b_y \geq d_y \quad (2.30)$$

Onde β é a constante usual de torção para seções retangulares e é calculada de acordo com a equação 3.5 mostrada adiante.

O fator de redução $\frac{1}{2}$ utilizado no cálculo de J_1 é devido ao fato da mesa estar representando uma laje, que é diferente de uma seção T isolada. Ou seja, conforme será visto no Capítulo 4, a inércia à torção de uma laje é a metade da obtida para uma viga.

Além disso, quando se está analisando uma laje nervurada com nervuras em duas direções ortogonais é necessário fazer uma modificação no cálculo de J_1 , pois neste caso a rigidez à torção J_1 da laje em uma direção é aumentada devido ao enrijecimento proporcionado pela nervura na direção ortogonal. Esse aumento na rigidez à torção pode ser calculado da seguinte maneira: considerando uma seção normal ao eixo x (Figura 2.5), a presença da nervura transversal W irá aumentar a rigidez à torção da laje S para um valor denotado por $(J_S + J_W)$. Portanto o novo valor de J_1 para a área hachurada (normal ao eixo y) da Figura 2.5 será:

$$(J_1)_{MODIFICADO} = J_1 \frac{(J_S + J_W)}{J_S} \quad (2.31)$$

Desta forma a equação 2.27 é modificada para:

$$J = (J_1)_{MODIFICADO} + J_2 \quad (2.32)$$

Sendo assim, a rigidez à torção D_{yx} pode ser calculada por:

$$D_{yx} = \frac{GJ}{\alpha_y} \quad (2.33)$$

De forma similar, a rigidez à torção D_{xy} de uma seção normal ao eixo x pode ser calculada apenas trocando os eixos utilizados.

3 ANALOGIA DE GRELHA

A analogia de grelha é um método bastante usado para análise de lajes, principalmente devido a sua facilidade de compreensão e utilização, e tem apresentado resultados satisfatórios para uma grande quantidade de pavimentos.

Esta técnica foi inicialmente idealizada por Marcus em 1932 (TIMOSHENKO,1959), que não dispunha, nesta época, de computadores e portanto era preciso se valer de processos aproximados para resolver as lajes.

Em 1959, com a constatação de que a análise de grelhas e pórticos planos pelo método dos deslocamentos era bastante parecida, LIGHTFOOT e SAWKO adaptaram um programa de cálculo de pórtico plano para o cálculo de grelhas.

Mais tarde, HAMBLY(1976) sistematizou este estudo para o cálculo de tabuleiros de pontes.

O procedimento de analogia de grelha consiste em substituir a laje por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente), conforme mostra a Figura 3.1.

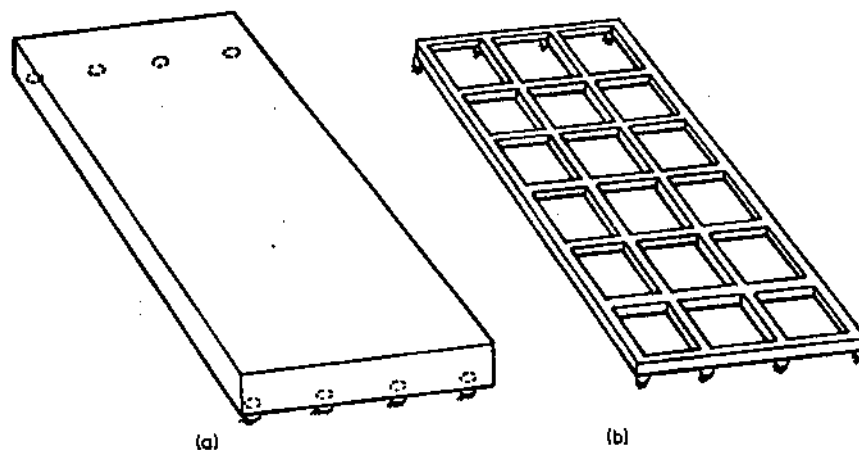


Figura 3.1- (a) Laje maciça; (b) grelha equivalente, HAMBLY (1976)

As rigidezes à torção e flexão em cada região da laje são tomadas, para efeito de análise, como concentradas na barra de grelha mais próxima. As rigidezes longitudinais da laje são concentradas nas barras longitudinais,

enquanto as rigidezes transversais são concentradas nas barras transversais. Esses valores devem ser tais que quando a laje em questão e a grelha equivalente forem sujeitas ao mesmo carregamento, as duas estruturas devem apresentar a mesma deformação e os momentos fletores, torsores e esforços cortantes devem ser iguais em seções correspondentes nas duas estruturas. Entretanto, segundo HAMBLY, isto se dá somente de forma aproximada, devido às diferentes características desses dois tipos de estrutura.

Primeiramente, o equilíbrio de qualquer elemento de uma laje exige que os momentos torsores sejam idênticos nas duas direções ortogonais ($M_{xy} = M_{yx}$), assim como as distorções angulares $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

No caso da grelha equivalente não existe nenhum princípio físico ou matemático que garanta que os momentos torsores e as distorções angulares em um determinado ponto sejam iguais nas direções ortogonais. Entretanto se a malha da grelha for suficientemente refinada, a grelha vai se deformar como uma superfície lisa com os momentos torsores e distorções aproximadamente iguais nas direções ortogonais.

Outro inconveniente da grelha é que o momento em uma barra depende apenas de sua curvatura, enquanto que em uma laje, o momento em qualquer direção depende da curvatura naquela direção e na direção ortogonal.

Além disso, CARVALHO (1994) também observou que o coeficiente de Poisson ν se faz sentir de forma diferente entre a teoria das placas e o processo de analogia de grelha. Isto acontece porque a rigidez de uma viga de seção retangular é dada por $D_v = E \frac{b h^3}{12}$, enquanto que na placa, considerando uma faixa de largura b e com a mesma altura da viga, é dada por $D = E \frac{b h^3}{12(1-\nu^2)}$, o que mostra que a placa é normalmente mais rígida que a viga.

Entretanto, depois de comparar os resultados das lajes maciças, obtidos através do processo de analogia de grelha, com os resultados fornecidos através do cálculo como placa pela teoria da elasticidade, pode-se dizer que os resultados obtidos com essa analogia são satisfatórios.

3.1 MODELAGEM

Como já foi visto o método consiste em desenvolver uma malha no interior da placa – a grelha, composta por barras ortogonais paralelas aos lados (como se fossem vigas) abrangendo toda a área da placa (Figura 3.1).

Para as lajes maciças a posição das barras é aleatória e vai depender do espaçamento da malha. Nos exemplos numéricos será mostrado, que ao contrário que se pensava, a medida que se refina a malha não há uma convergência dos resultados obtidos.

3.2 SISTEMA DE COORDENADAS E GRAUS DE LIBERDADE

Como foi visto anteriormente, considera-se a grelha contida no plano XY, e as cargas externas atuantes perpendicularmente a este plano, na direção Z, com sentido positivo obedecendo à regra da mão direita.

No caso da grelha existem três graus de liberdade por nó, ou seja, duas rotações (θ_x e θ_y) e uma translação no eixo z.

3.3 PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS

As propriedades das barras influenciam diretamente nos resultados e portanto deve -se analisar vários aspectos das mesmas.

a) Rigidez à flexão das barras:

Cada barra da grelha irá representar uma certa “faixa” da placa, com altura igual a espessura da laje e a largura dependente da malha da grelha.

Desta forma o momento de inércia à flexão das barras longitudinais e transversais será calculado da seguinte forma:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.1)$$

Onde:

b = largura da barra da grelha;

h = altura da barra da grelha.

b) Rigidez à torção das barras da grelha:

O parâmetro de rigidez à torção $G.J$ é composto pelo módulo de elasticidade transversal (G) do material, que pode ser medido ou calculado, em função do módulo de elasticidade longitudinal (E_c) e pelo momento de inércia à torção da seção transversal da barra (J).

Segundo a lei de Hooke, para materiais isotrópicos homogêneos, a equação é a seguinte:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2)$$

Para aplicações em concreto armado, a NBR-6118, no item 8.2.6, fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0,2. Nos exemplos utilizados neste trabalho, foi adotada a seguinte relação :

$$G = 0,4 \cdot E_c \quad (3.3)$$

Essa relação é adotada em COELHO (2000) e também na norma NBR-6118.

O outro parâmetro a ser analisado é o momento de inércia à torção da seção transversal da barra. De acordo com HAMBLY (1976) o momento de inércia à torção não é simplesmente uma propriedade geométrica da seção transversal da peça como é o momento de inércia à flexão I . No caso de um cilindro, o momento de inércia à torção é igual ao momento polar de inércia I_p , entretanto este é um caso especial, sendo que para outros tipos de seção transversal o momento de inércia à torção é totalmente diferente de I_p . Portanto, não existe uma regra geral para o cálculo do momento de inércia à torção. Para um retângulo de lados b e h , por exemplo, o J pode ser calculado da seguinte forma (GERE e WEAVER, 1980):

$$J = \beta e^3 f \quad (3.4)$$

onde:

e = menor dimensão da seção transversal;

f = maior dimensão da seção transversal

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f}\right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4}\right) \quad (3.5)$$

A expressão dada para β , na verdade, é uma simplificação de uma série, conforme pode ser visto em TIMOSHENKO (1959).

MONTOYA (1973) e HAMBLY (1976) propõem que se use, para uma barra de grelha que representa uma largura b de uma laje maciça, $J = 2I$. No Capítulo 4, onde é analisada a analogia de grelha para lajes maciças, é mostrado de onde partiu essa idéia.

3.4 CARREGAMENTO

As cargas atuantes na laje provenientes do peso-próprio, revestimentos, paredes divisórias, carga acidentais e outras que possam estar atuando na estrutura, atuam perpendicularmente ao plano XY e podem ser representadas de duas maneiras: como cargas distribuídas ao longo das barras e como cargas concentradas nos nós. Para ambos os casos a carga deve ser calculada através da área de influência do elemento (barra ou nó) como mostra a Figura 3.2. Em todos os exemplos mostrados adiante foram consideradas cargas distribuídas ao longo da barra.

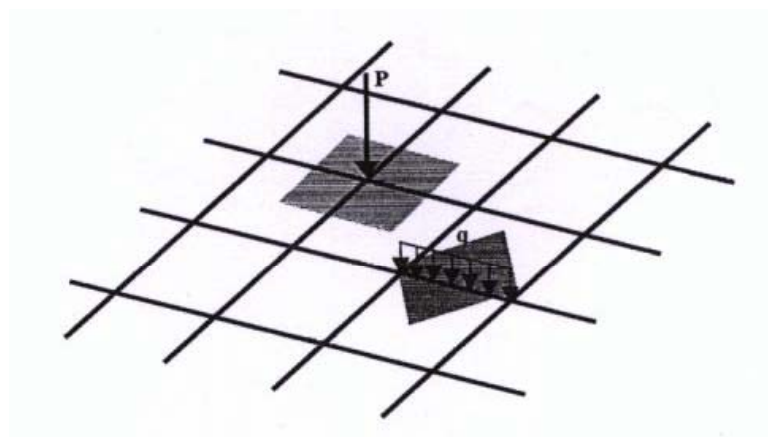


Figura 3.2 – Carregamento nos nós – carga nodal P – e carregamento nas barras – carga uniformemente distribuída q

4 MODELAGEM DE LAJES MACIÇAS

Com o intuito de obter-se uma maior clareza com relação a analogia de grelha para lajes nervuradas, foi feito um estudo prévio da analogia de grelha para lajes maciças, enfocando a parte que diz respeito a rigidez à torção, que é um dos pontos mais importantes na análise das lajes nervuradas.

Conforme observou COELHO (2000), a rigidez à torção da placa diminui significativamente para grelhas com barras pouco espaçadas. Isto ocorre porque a rigidez à torção é proporcional ao cubo da menor dimensão da seção transversal da faixa. Quando o espaçamento das barras passa a ser menor que a espessura da laje, a menor dimensão passa a ser a largura da faixa. Desta forma a rigidez à torção passa a ser muito influenciada pelo espaçamento das barras da grelha utilizada, e portanto, a utilização da equação 3.4 para o cálculo da rigidez à torção não fornece resultados adequados. Uma alternativa utilizada por COELHO (2000) foi adotar uma inércia à torção proporcional à inércia à flexão. Essa idéia já havia sido proposta por MONTROYA (1973) e também por HAMBLY (1976) que sugeriram que se utilize a inércia à torção da barra da grelha equivalente ao dobro de sua inércia à flexão. ($J = 2I$)

HAMBLY (1976) demonstrou porque deve-se utilizar a rigidez à torção como o dobro da rigidez à flexão. Como a distribuição da tensão de cisalhamento em um elemento de placa é uniforme e varia linearmente a partir da linha média da placa, conforme é mostrado na Figura 4.1, pode-se escrever:

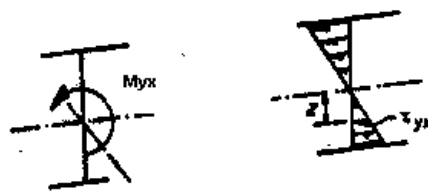


Figura 4.1- Distribuição de tensões devido à torção, HAMBLY (1976)

$$\frac{\tau_{xy}}{z} = -\frac{M_{xy}}{i} = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.1)$$

onde $i = \frac{h^3}{12} \rightarrow$ momento de inércia da laje por unidade de largura.

Portanto:

$$M_{xy} = -\frac{E h^3}{(1+\nu)12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{G h^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.2)$$

visto que

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

Pode-se considerar portanto que :

$$J = \frac{h^3}{6} \text{ por unidade de largura} \quad (4.4)$$

Sabe-se que para vigas de seção retangular, em que $b > 5h$, a inércia à torção pode ser escrita de forma simplificada (partindo da equação 3.4) como:

$$J = \frac{b h^3}{3} \quad (4.5)$$

Portanto, pode-se perceber que a equação 4.4 de inércia à torção de uma laje por unidade de largura é igual à metade do valor da equação 4.5 de uma viga.

Esta diferença é uma consequência de diferentes definições de torção. Se a laje mostrada na Figura 4.2 for analisada como uma viga, o momento torsor é definido como a soma da torção causada pelo fluxo de cisalhamento horizontal distribuído na face superior e inferior, mais a torção causada pelo fluxo de cisalhamento vertical aplicado nas faces laterais.

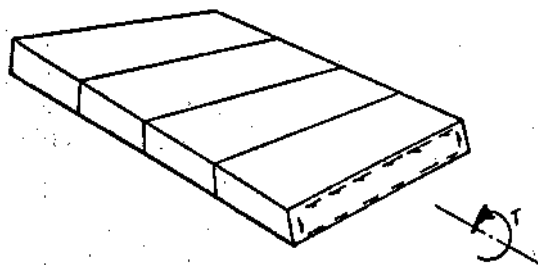


Figura 4.2- Torção em uma laje como se fosse viga, HAMBLY (1976)

Entretanto se essa laje delgada é analisada como laje, o momento torsor M_{xy} é definido como provocado somente pelo fluxo de cisalhamento horizontal

distribuído nas faces superior e inferior, conforme a Figura 4.1. O fluxo de cisalhamento vertical distribuído nas faces laterais representa valores elevados do esforço cortante Q_x e são responsáveis por metade da torção total e estão associados ao momento torsor M_{xy} através da equação 2.7. Apesar dessas duas definições de torção serem diferentes, elas são equivalentes: enquanto a laje tem metade da rigidez à torção da viga, a qual se dá devido à torção em torno do eixo longitudinal, a outra metade da rigidez à torção é atribuída à torção transversal da laje, a qual não é considerada na análise de vigas.

Como a inércia à flexão é dada por :

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad (4.6)$$

Quando compara-se a equação 4.4 e a equação 4.6, pode-se perceber, conseqüentemente, que:

$$J = 2 I \quad (4.7)$$

A equação 4.7 mostra que ao se discretizar uma laje maciça como uma grelha de vigas equivalente, deve-se utilizar portanto, segundo HAMBLY (1976), a inércia à torção dessas vigas como o dobro de sua inércia à flexão.

COELHO (2000) estudou outras relações J/I além da mostrada na equação 4.7. Essas outras relações foram : $J/I=1$; $J/I=2,5$; $J/I=3$ e $J/I=4$, concluindo que uma relação J/I entre 2 e 2,5 apresenta resultados para os esforços e deslocamentos que diferem muito pouco dos obtidos pela teoria da elasticidade.

Alguns dos exemplos contidos aqui são os mesmos encontrados em COELHO (2000), com algumas modificações nos parâmetros envolvidos, entretanto neste trabalho foram estudados mais casos de lajes maciças.

Em todos os exemplos mostrados a seguir onde as lajes foram consideradas apoiadas, o apoio foi considerado livre para rotação segundo o eixo perpendicular às barras da grelha que chegam nesse apoio, porém com a rotação ao redor do eixo dessas barras impedida.

Para todas as lajes estudadas, as malhas foram sempre dispostas de forma que exista um nó exatamente no meio da laje. Isto é importante para que se possa obter sempre os valores máximos de momentos e flechas e para fazer a comparação com os resultados obtidos pela teoria da elasticidade.

Em alguns casos as barras das extremidades não são iguais às centrais e portanto as cargas nessas barras serão diferentes. Nos exemplos mostrados adiante cada barra vai receber a carga de acordo com sua área de influência, portanto as barras de tamanhos diferentes (barras das extremidades), receberão cargas diferentes.

4.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1.1 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES QUADRADAS COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_Y/L_X = 1$

EXEMPLO 1

- Laje maciça de vão 4 x 4m
- Espessura $h = 10$ cm
- Considerada apoiada nos quatro lados em apoios indeslocáveis
- Carga uniformemente distribuída $q = 10 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 21000 \text{ MPa}$
- Módulo de Elasticidade Transversal $G = 0,4 E \therefore G = 8400 \text{ MPa}$

A laje será discretizada em 6 diferentes modelos de grelha, com barras espaçadas de: 80x80 cm, 45x45 cm, 36x36 cm, 19x19 cm, 10x10 cm e 5x5 cm, conforme mostram as Figuras 4.3 a 4.8.

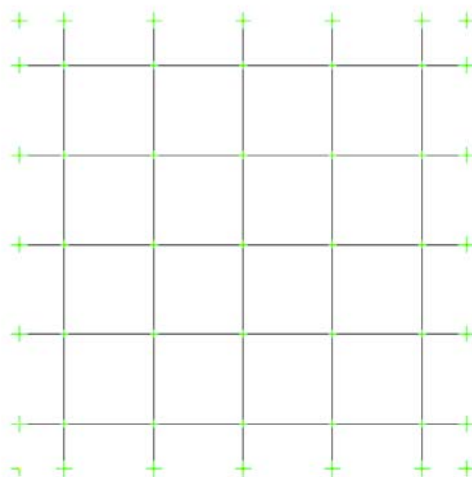


Figura 4.3 – Laje discretizada com grelha de 80x80 cm

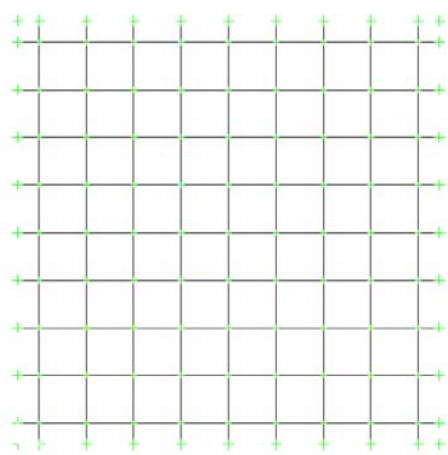


Figura 4.4– Laje discretizada com grelha de 45x45 cm

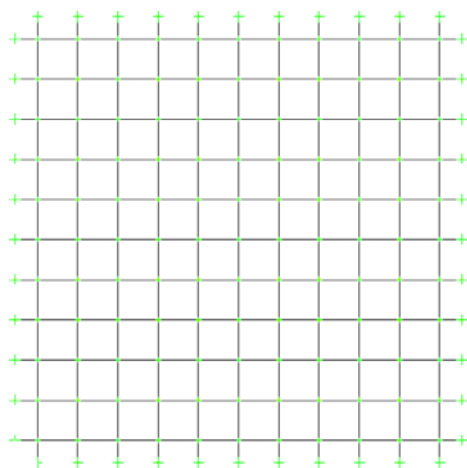


Figura 4.5 – Laje discretizada com grelha de 36x36 cm

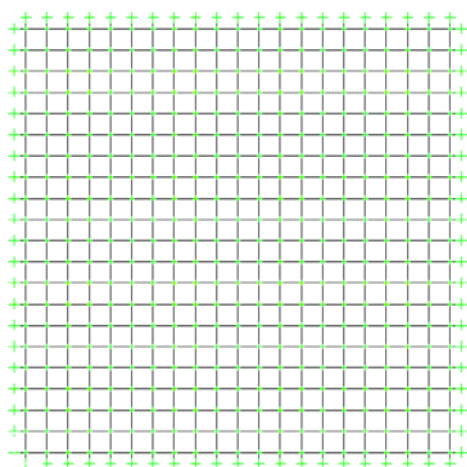


Figura 4.6 – Laje discretizada com grelha de 19x19 cm

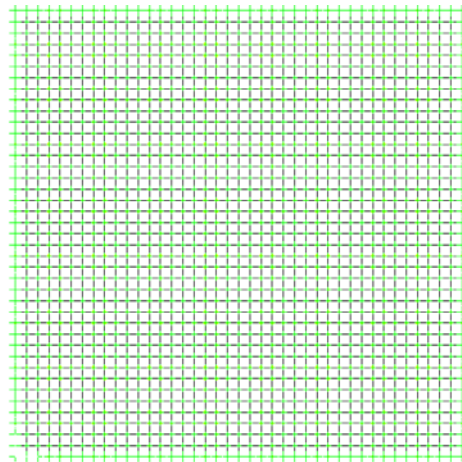


Figura 4.7 – Laje discretizada com grelha de 10x10 cm

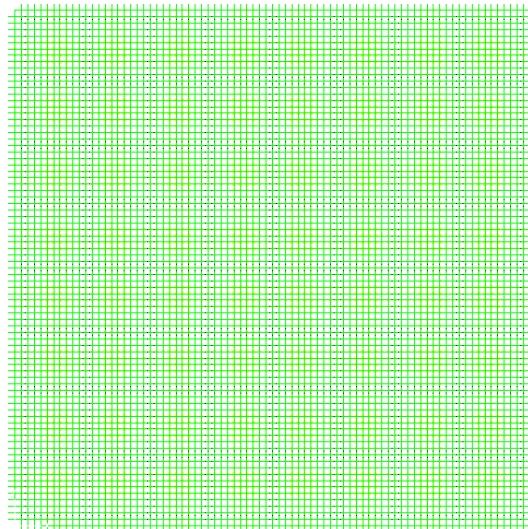


Figura 4.8– Laje discretizada com grelha de 5x5 cm

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (Teoria da Elasticidade- TE), com $\nu = 0,2$:
- $m_x = m_y = 7,05 \text{ kNm/m}$
 - Flecha = 0,57 cm

- Resultados obtidos através da analogia de grelha e comparação com TE:

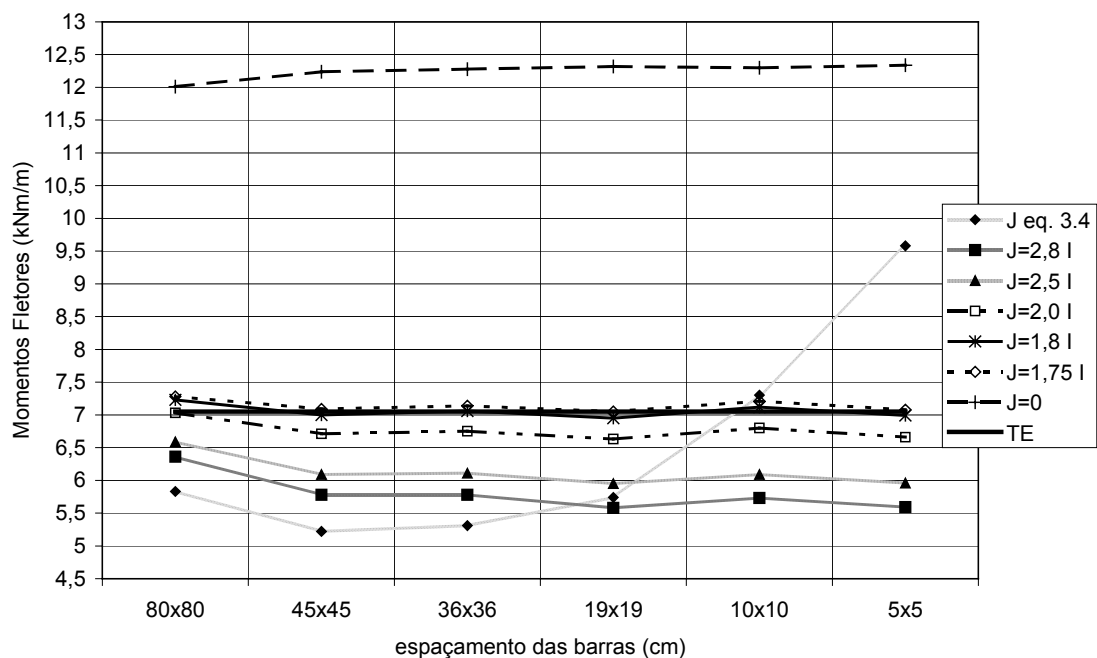


Figura 4.9 – Momentos fletores $m_x=m_y$ em função da grelha

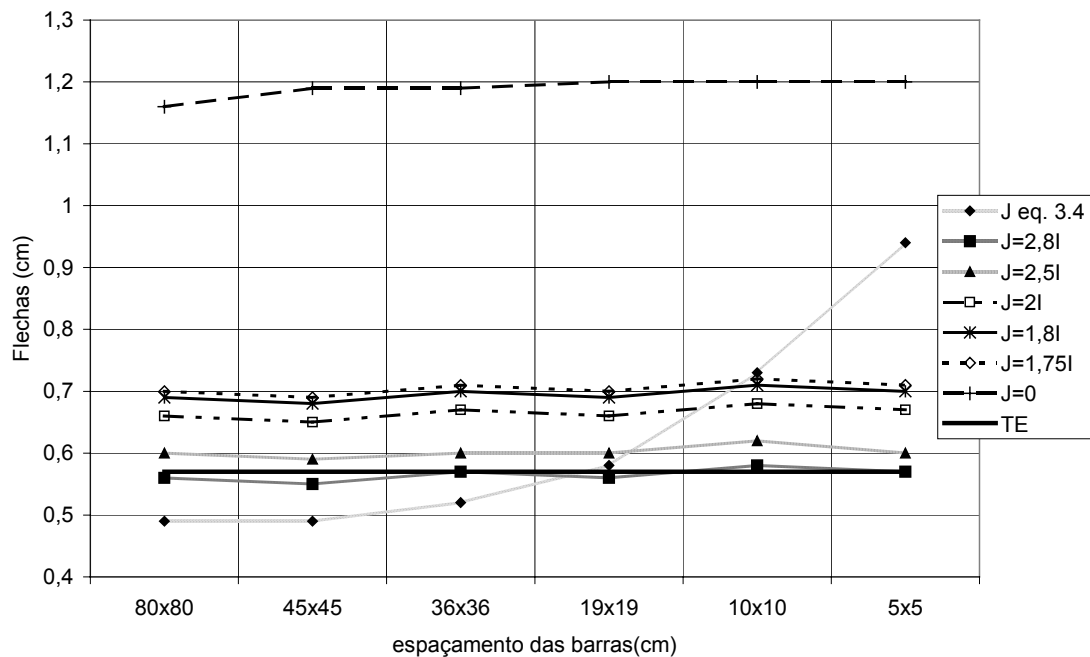


Figura 4.10 – Flechas em função da grelha

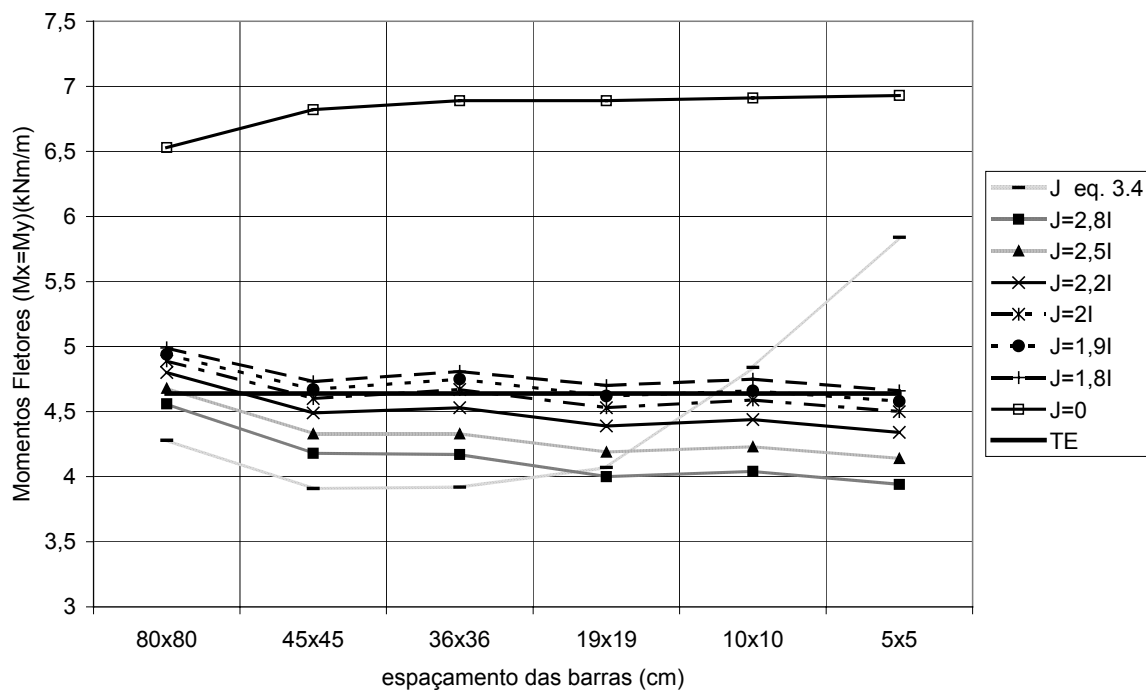
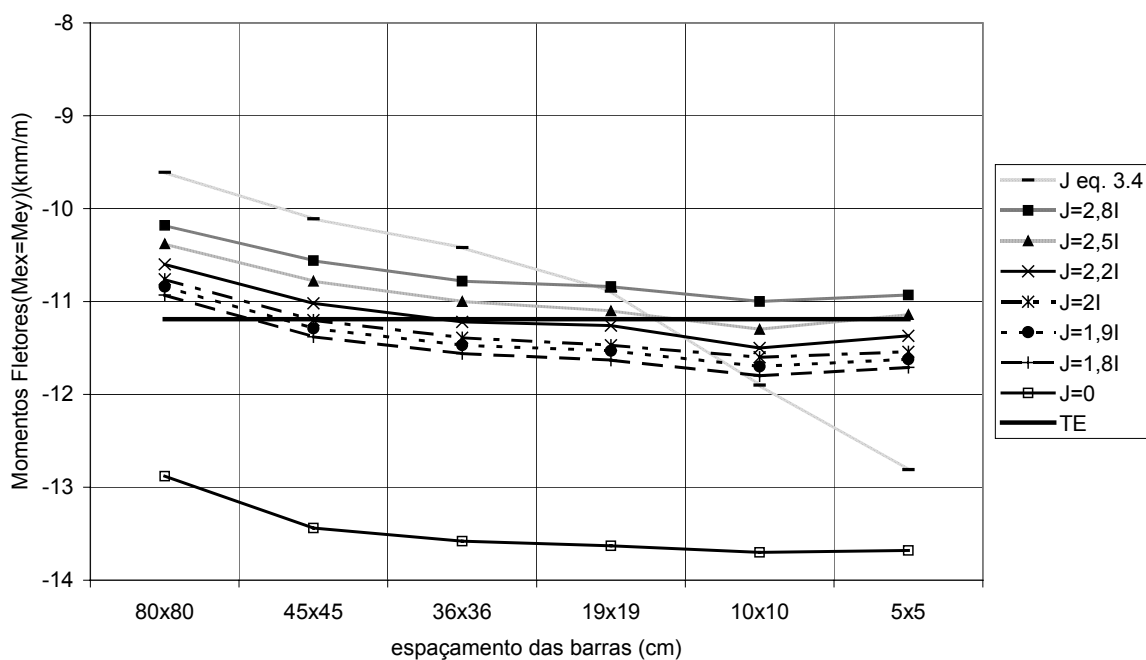
Pode-se perceber das Figuras 4.9 e 4.10 que não existe uma variação regular dos momentos fletores e flechas com o refinamento da malha. O que quer dizer que nas diversas relações J/I analisadas, muitas vezes, ao contrário do que se poderia pensar, não foi o modelo de grelha com barras menos espaçadas que apresentou os resultados mais próximos da teoria da elasticidade. A relação J/I que melhor representou os momentos fletores em relação a teoria da elasticidade foi entre 1,8 e 1,75, enquanto que para as flechas foi em torno de 2,8. É interessante observar que no caso da grelha com espaçamento de 5 cm, a largura passa a ser a menor dimensão que deve ser usada na equação 3.4. Este caso foi o que apresentou piores resultados.

EXEMPLO 2

Mesmas características da laje anterior, porém considerando 2 lados adjacentes engastados e os outros dois apoiados.

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:
 - $m_x = m_y = 4,64 \text{ kNm/m}$
 - $m_{ex} = m_{ey} = -11,19 \text{ kNm/m}$
 - Flecha = 0,3 cm

- Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

Figura 4.11 – Momentos fletores ($m_x=m_y$) em função da grelhaFigura 4.12 – Momentos fletores ($m_x=m_y$) em função da grelha

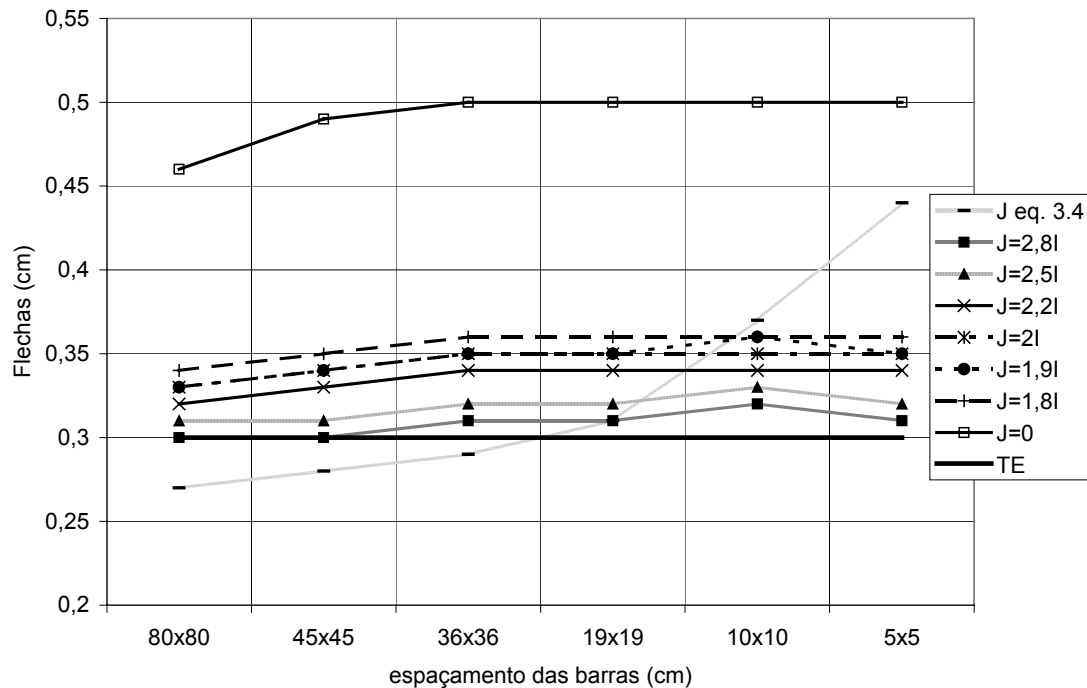


Figura 4.13 – Flechas em função da grelha

Pode-se perceber que existe uma pequena variação, irregular para os momentos positivos com a diminuição do espaçamento das barras. Os momentos negativos aumentam até a malha de 10 cm e na malha de 5 cm sofrem uma pequena diminuição. Este fato também pode ser observado para as flechas para algumas relações de J/I . Em comparação com os valores obtidos pela TE, a relação J/I que melhor representou os momentos positivos foi em torno de 1,9; já para os momentos negativos esse valor foi em torno de 2,2 e para as flechas 3.

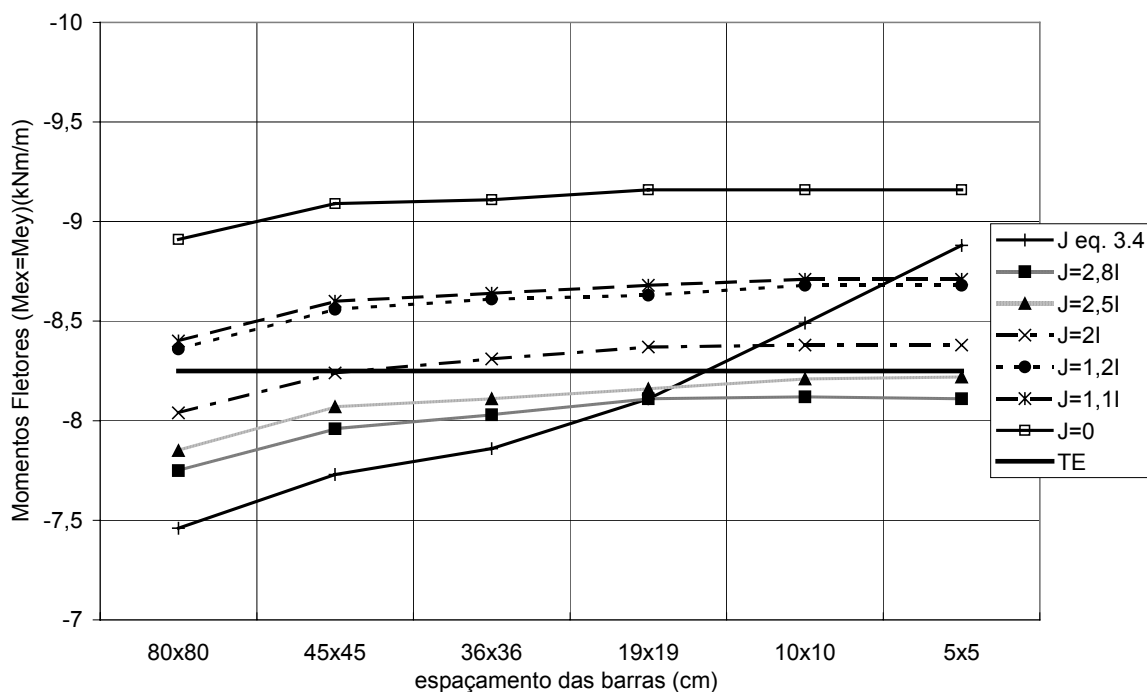
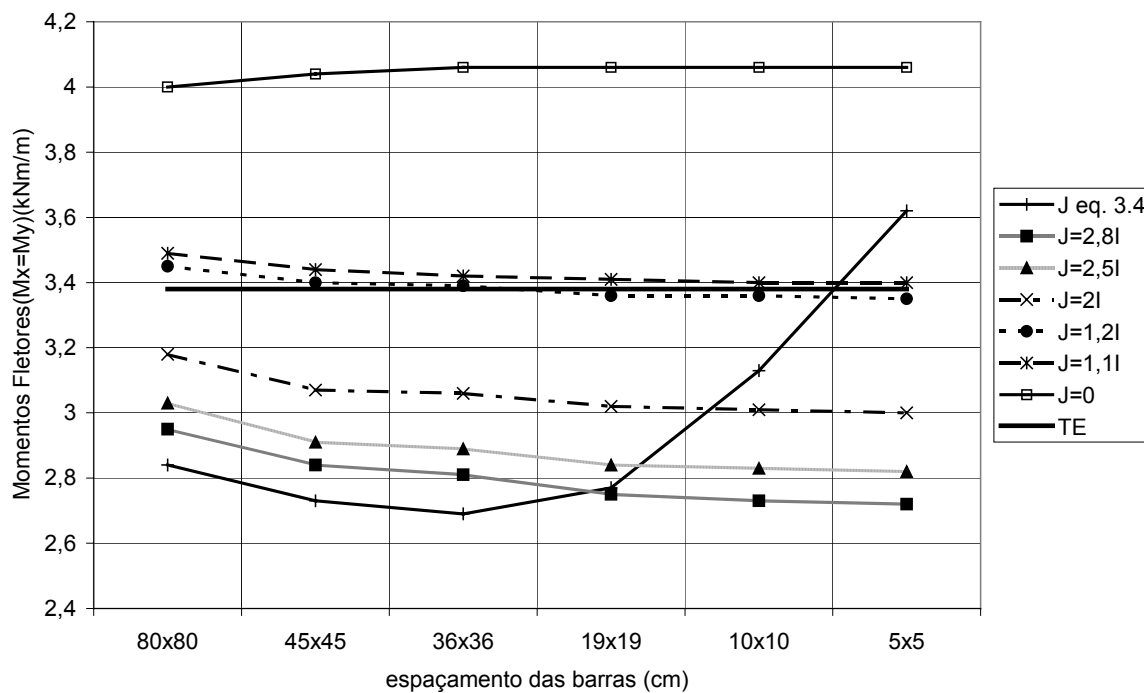
EXEMPLO 3

Mesmas características da laje do exemplo 1, porém considerando os quatro lados da laje engastados.

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:
 - $m_x = m_y = 3,38 \text{ kNm/m}$
 - $m_{ex} = m_{ey} = -8,25 \text{ kNm/m}$

- Flecha = 0,18 cm

➤ Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:



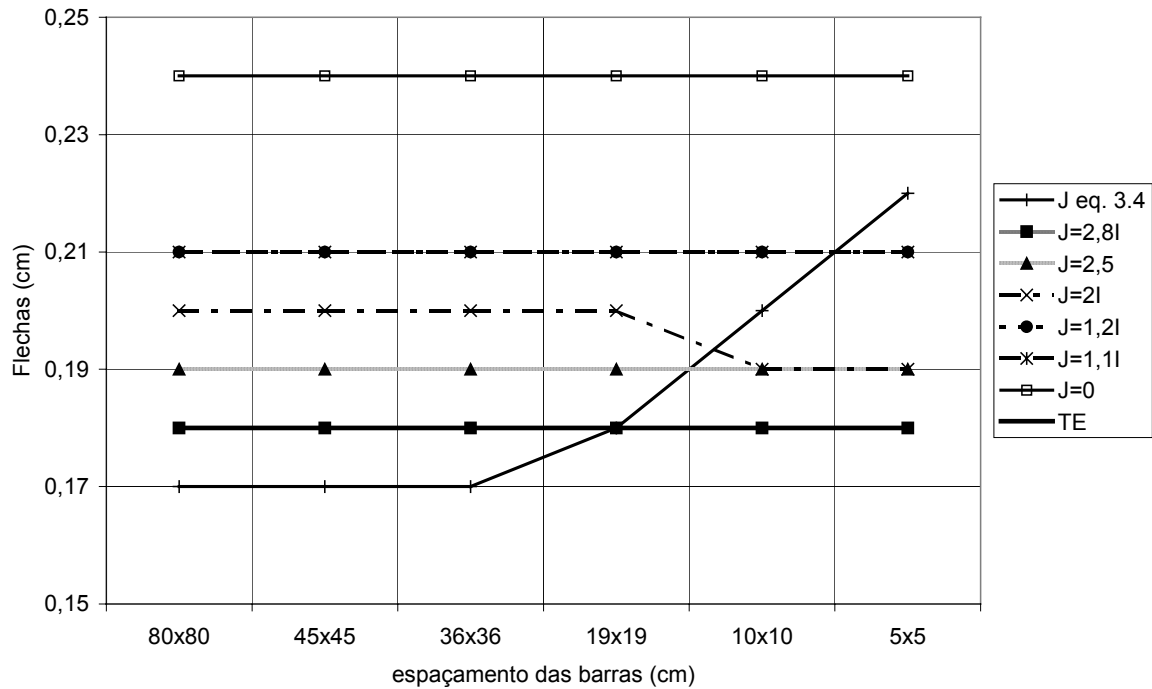


Figura 4.16 – Flechas em função da grelha

Analisando as Figuras 4.14 a 4.16 pode-se notar que, com exceção do caso em que J é calculado pela equação 3.4, para todas as relações J/I os momentos fletores positivos diminuem e os momentos negativos aumentam com o refinamento do modelo. Já as flechas permanecem praticamente constantes com a variação da grelha utilizada (exceto para $J=2I$).

É interessante observar que os resultados obtidos a partir da grelha de 19 cm praticamente não sofrem variação com a redução do espaçamento da malha.

Em comparação com os valores fornecidos pela TE, para este caso a relação J/I que melhor aproximou os momentos positivos foi 1,2; para os momentos negativos foi entre 2 e 2,5; e finalmente para as flechas foi 2,8.

4.1.2 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES RETANGULARES COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_Y/L_X = 1,5$

EXEMPLO 1

- Laje maciça de 4 x 6m
- Espessura $h = 10$ cm
- Considerada apoiada nos quatro lados em apoios indeslocáveis
- Carga uniformemente distribuída $q = 10 \text{ kN/m}^2$
- Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 21000 \text{ MPa}$
- Módulo de Elasticidade Transversal $G = 0,4 E \therefore G = 8400 \text{ MPa}$

A laje será discretizada em 6 diferentes modelos de grelha, com barras espaçadas de: 80x80 cm , 45x45 cm, 36x36 cm, 19x19 cm, 10x10 cm e 5x5 cm.

➤ Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:

- $m_x = 12,6 \text{ kNm/m}$
- $m_y = 6,81 \text{ kNm/m}$
- Flecha = 1,09 cm

➤ Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

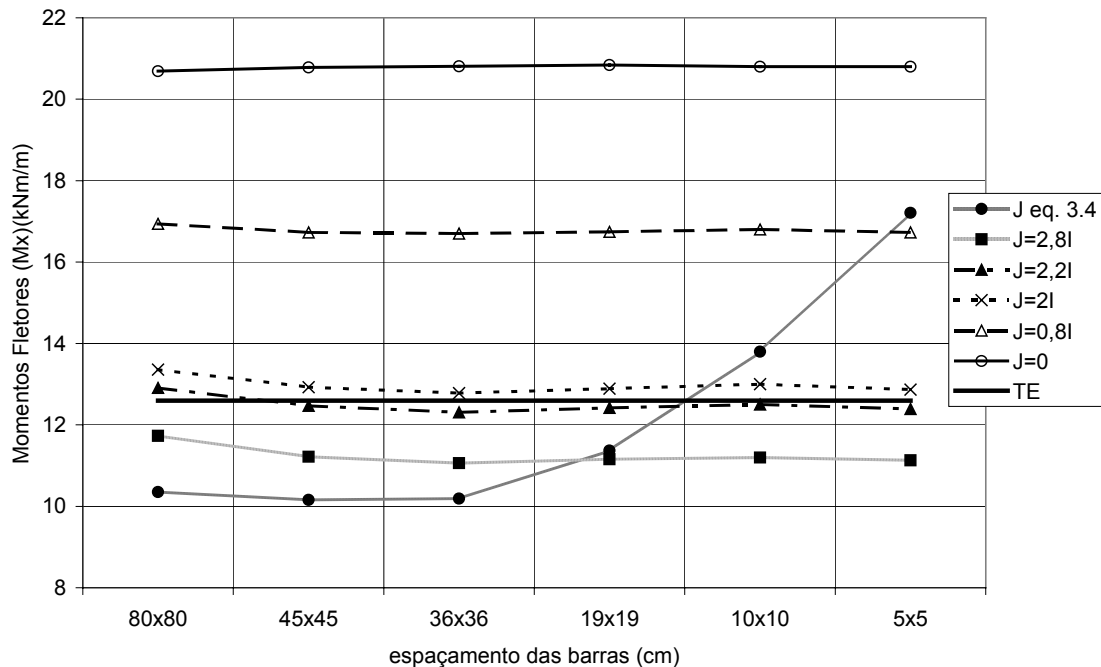


Figura 4.17 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha

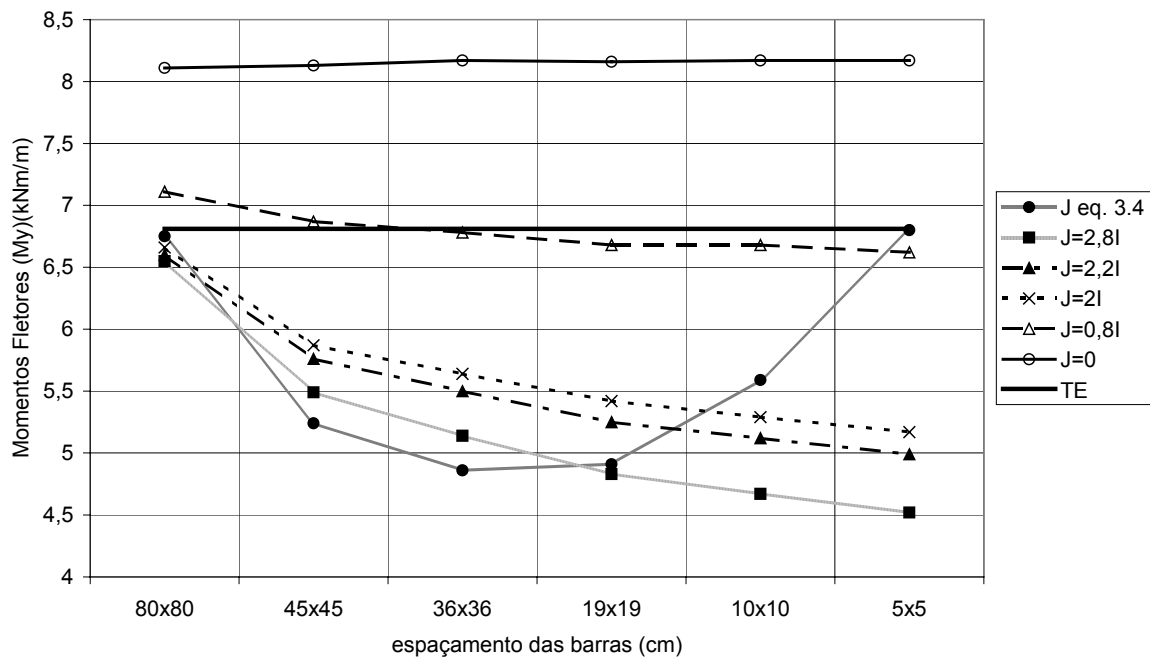


Figura 4.18 – Momentos fletores (my) em função da grelha

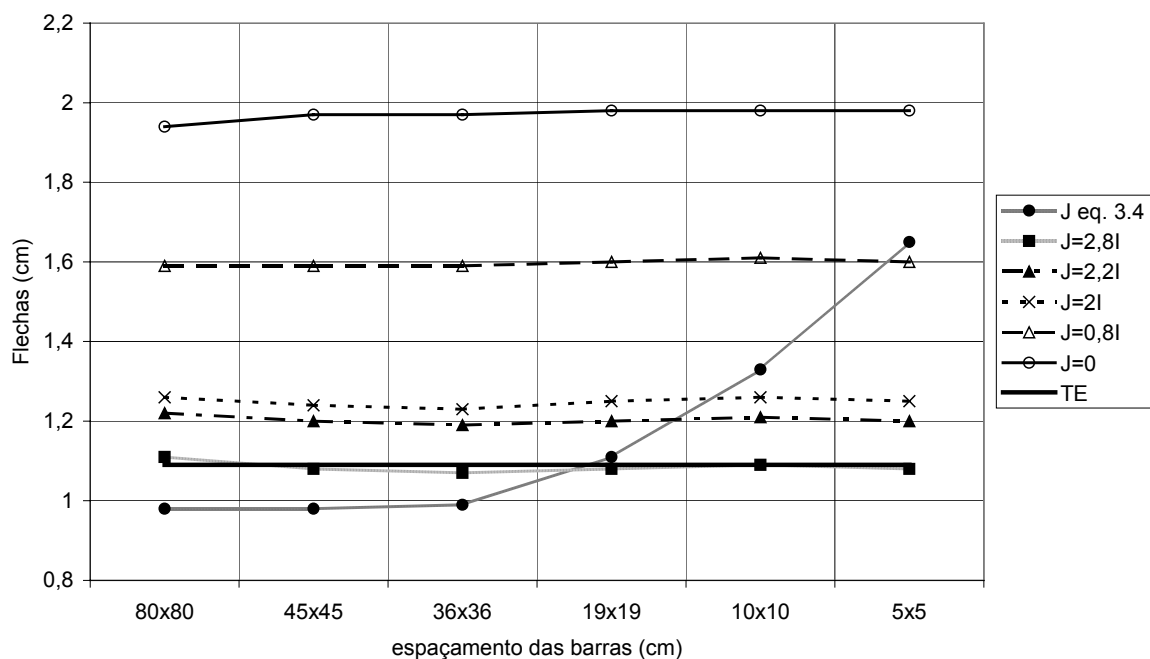


Figura 4.19 – Flechas em função da grelha

Em comparação com os resultados da TE, a relação J/I que melhor aproximou os momentos fletores m_x foi em torno de 2,2; já para m_y esse valor

foi bastante inferior : 0,8. Pode-se perceber, analisando a Figura 4.18, que para os momentos fletores m_y , houve uma variação significativa dos valores em função do espaçamento das barras para $J \geq 2I$. A melhor relação obtida para as flechas foi a mesma dos exemplos anteriores: 2,8.

EXEMPLO 2

Mesmas características da laje anterior, porém considerando 2 lados adjacentes engastados e os outros dois apoiados.

Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:

- $m_x = 7,73 \text{ kNm/m}$
- $m_y = 3,98 \text{ kNm/m}$
- $m_{ex} = -16,67 \text{ kNm/m}$
- $m_{ey} = -12,9 \text{ kNm/m}$
- Flecha = 0,54 cm

➤ Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

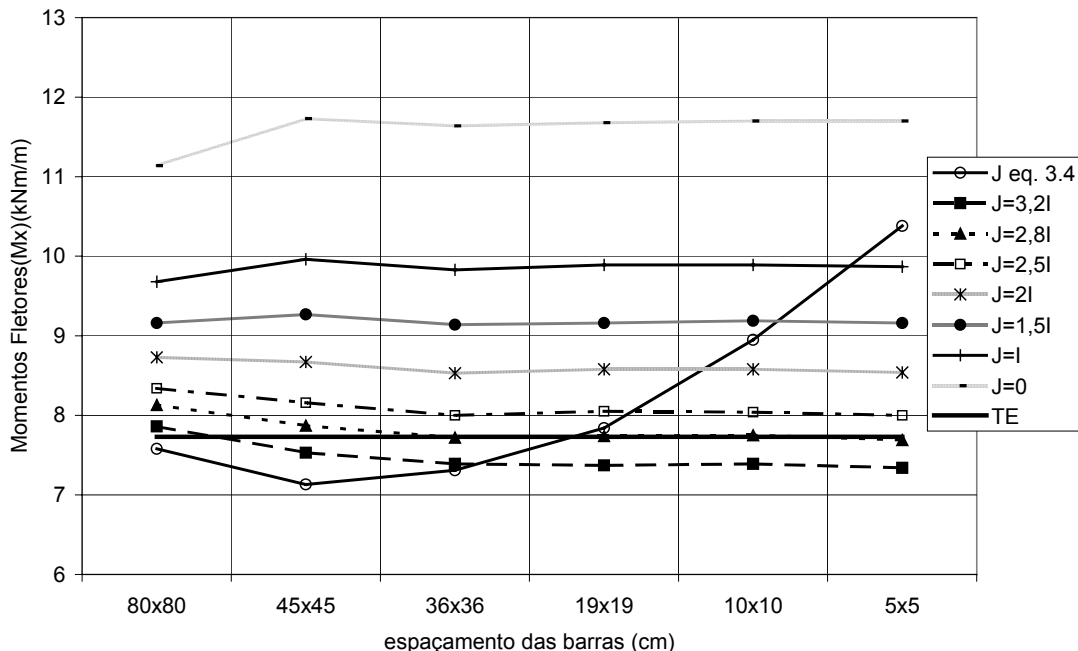
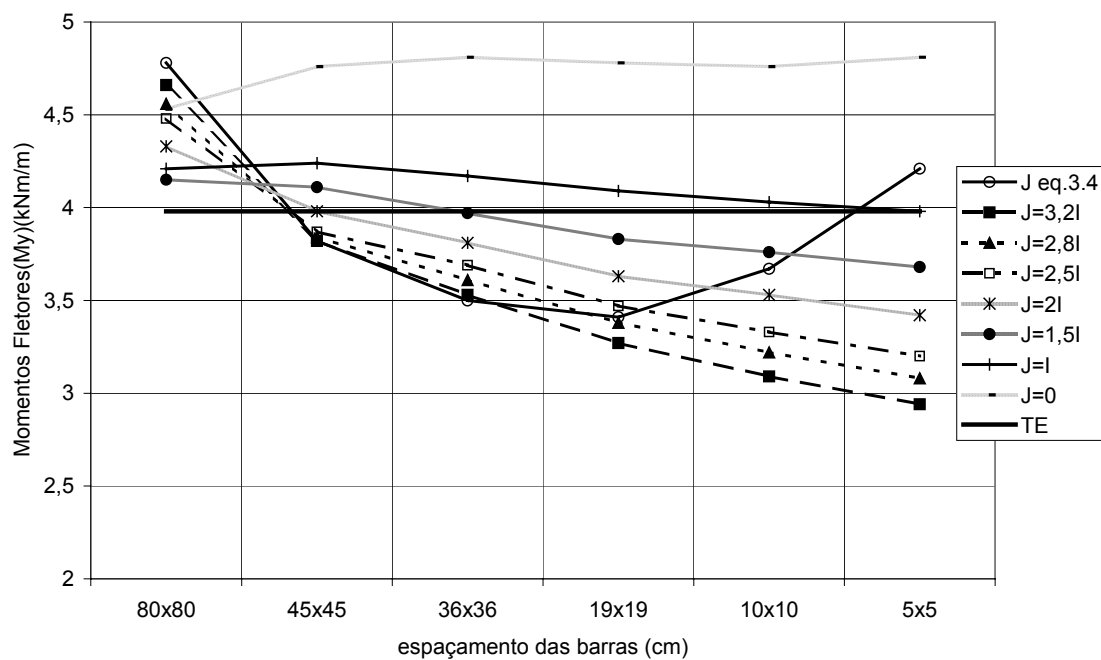
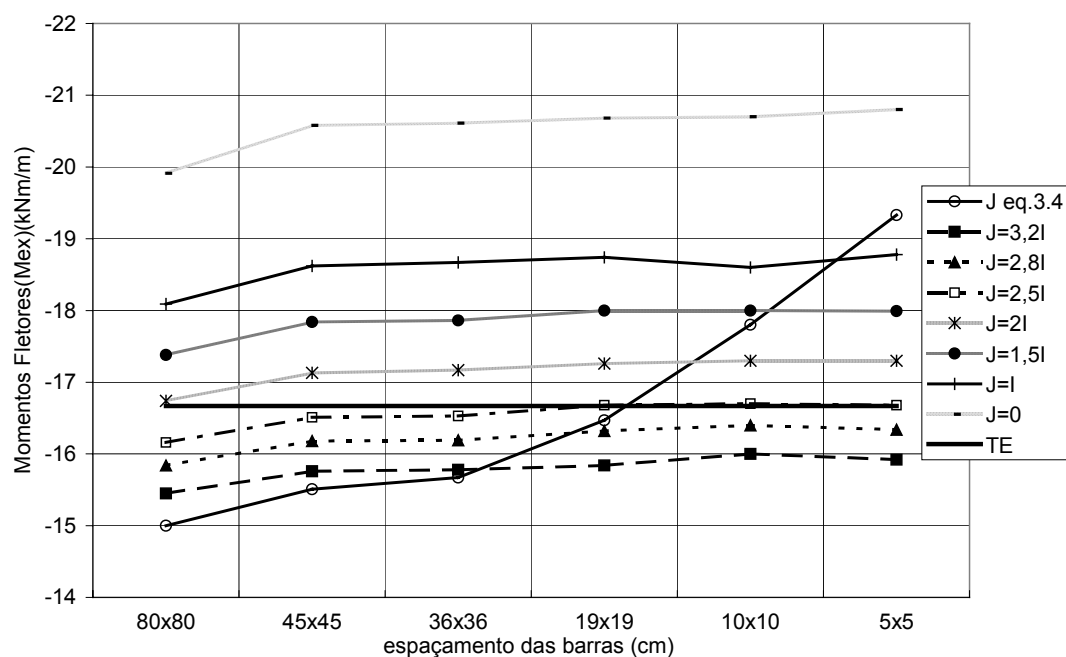


Figura 4.20 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha

Figura 4.21 – Momentos fletores (m_y) em função da grelhaFigura 4.22 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha

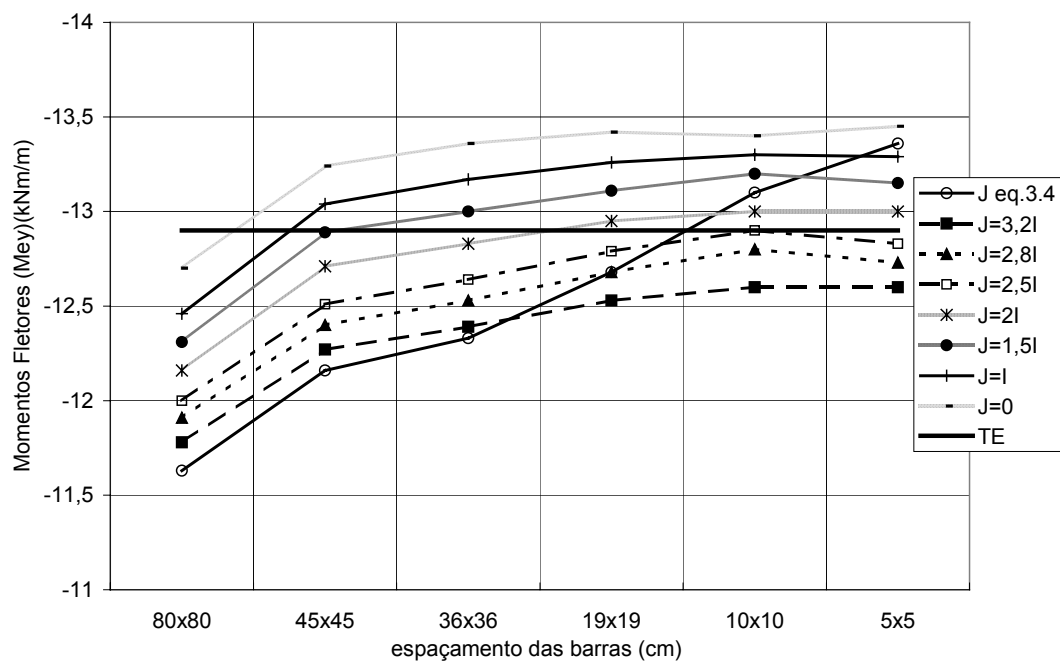
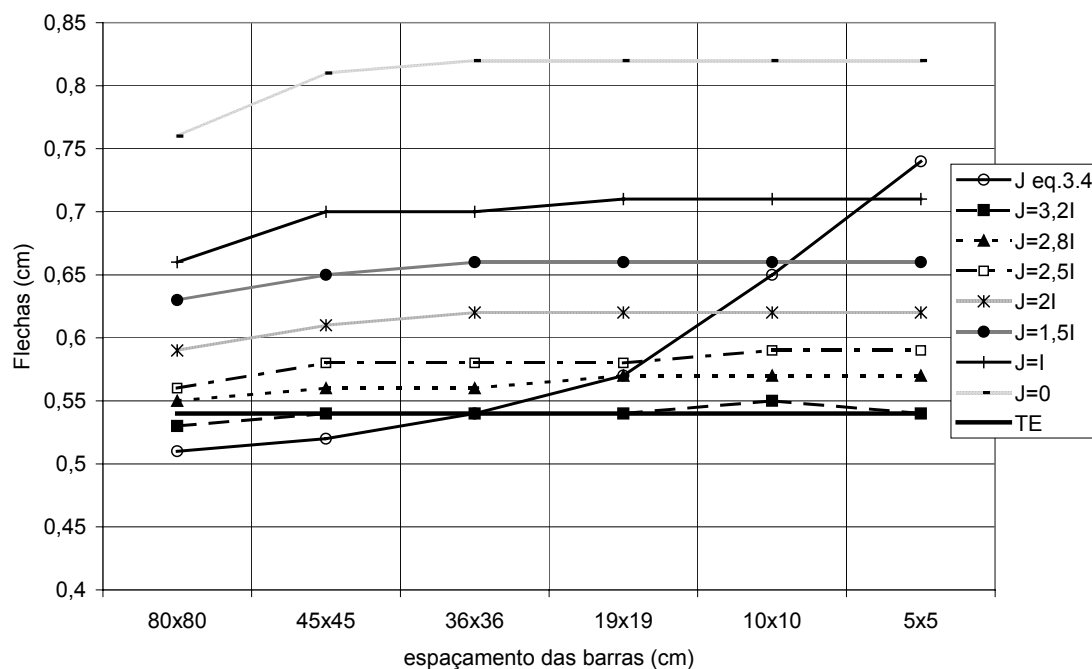
Figura 4.23 – Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha

Figura 4.24 – Flechas em função da grelha

Em comparação com os valores fornecidos pela TE, a relação J/I que melhor aproxima os momentos fletores m_x é a de 2,8; para os momentos fletores m_y esse valor se encontra entre 1,5 e 1; para os momentos negativos m_{xy} a relação J/I que melhor os aproxima é de 2,5. Já para os momentos m_{yx} é interessante observar que a relação J/I que obteve os resultados mais próximos da teoria da elasticidade dependeu bastante da grelha utilizada, ou seja, para diferentes espaçamentos de barras utilizados foram encontrados diferentes relações J/I que melhor representaram os resultados. Essas relações são: 2,5, 2 e 1,5. Entretanto pode-se dizer que a relação $J/I = 2$ representa relativamente bem os resultados, com uma diferença máxima de 6,1% para a grelha com espaçamento entre as barras de 80 cm. Os melhores resultados das flechas foram obtidos com a relação $J/I = 3,2$.

EXEMPLO 3

Mesmas características da laje do exemplo 1, porém considerando os 4 lados da laje engastados.

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:
 - $m_x = 5,76 \text{ kNm/m}$
 - $m_y = 2,79 \text{ kNm/m}$
 - $m_{xy} = -12,12 \text{ kNm/m}$
 - $m_{yx} = -9,14 \text{ kNm/m}$
 - Flecha = 0,31 cm

- Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

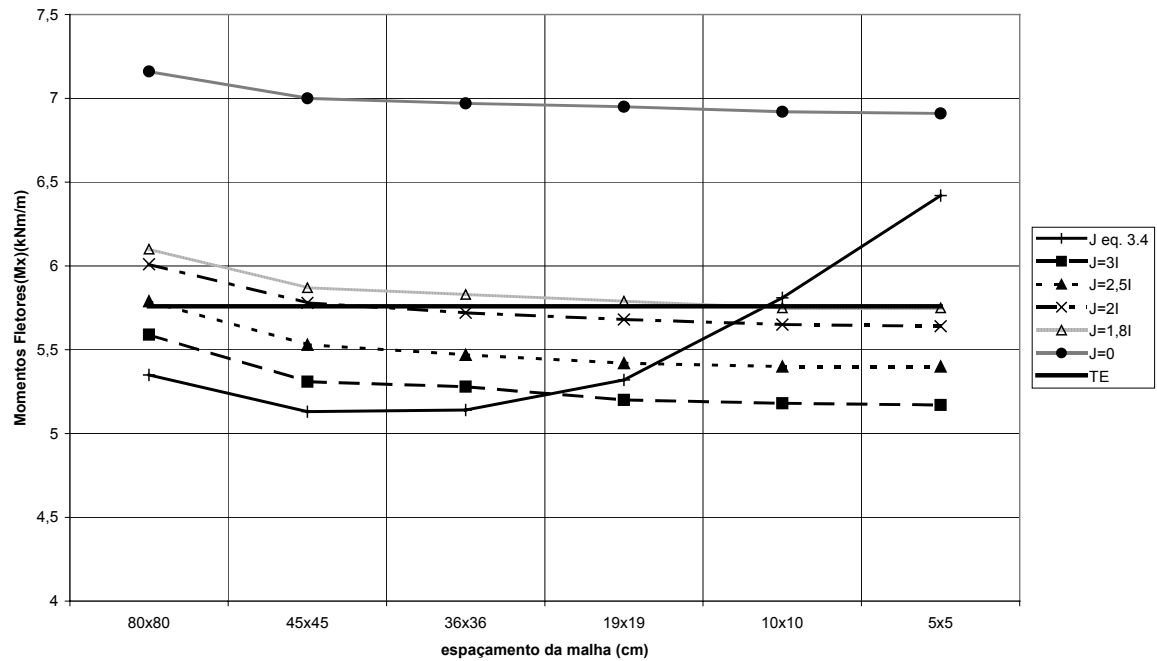


Figura 4.25– Momentos fletores (mx) em função da grelha

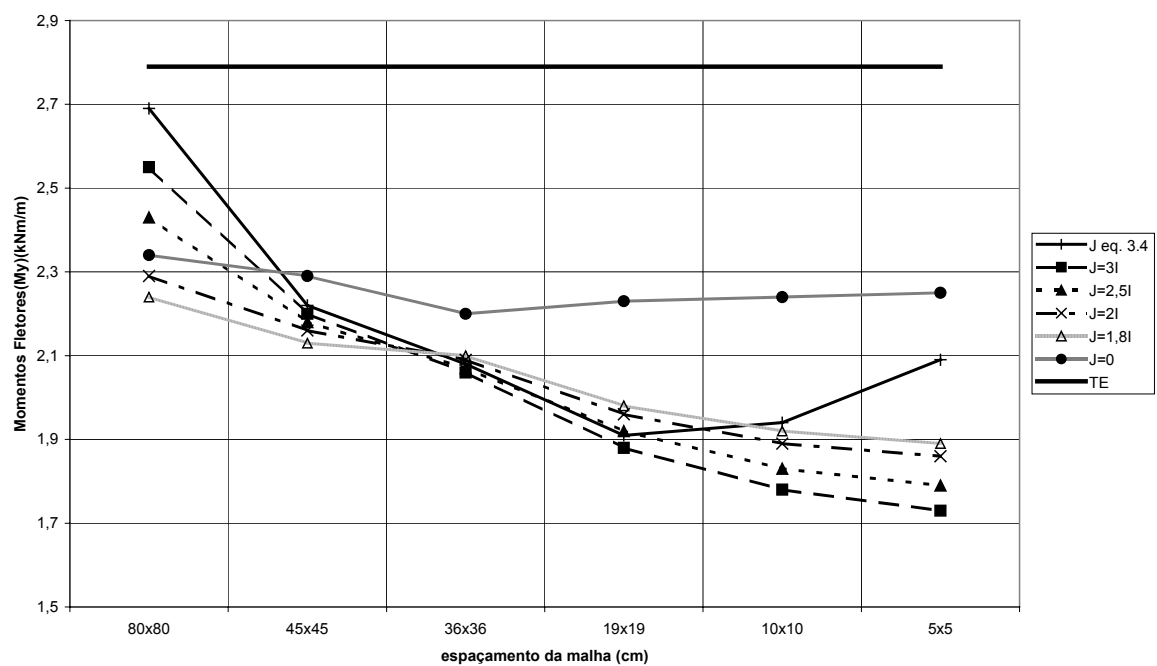
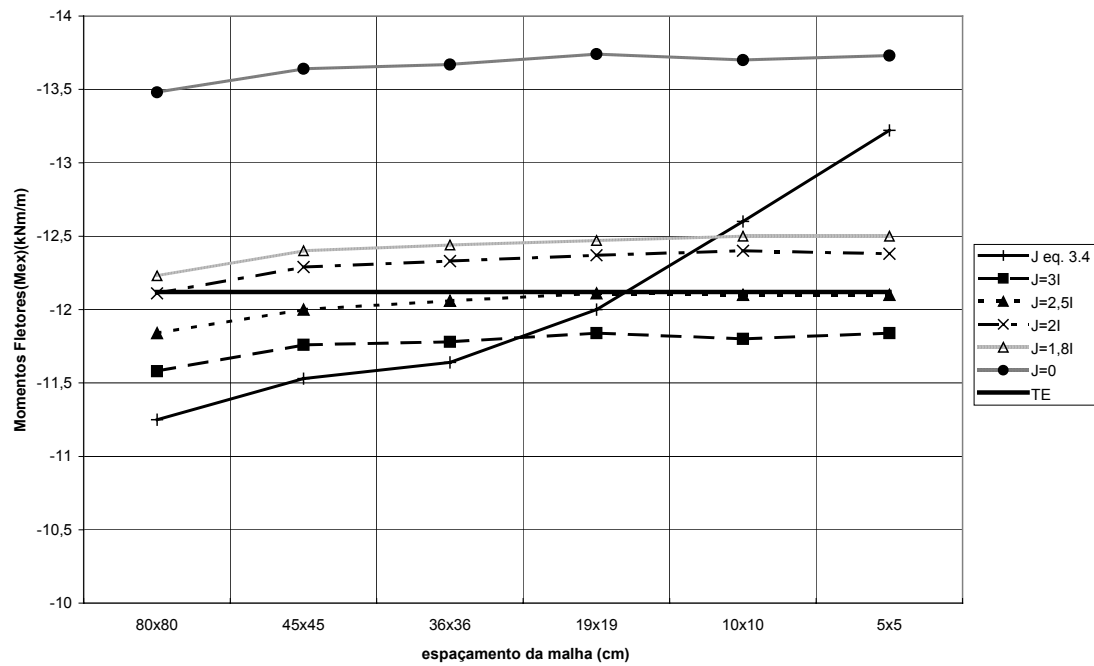
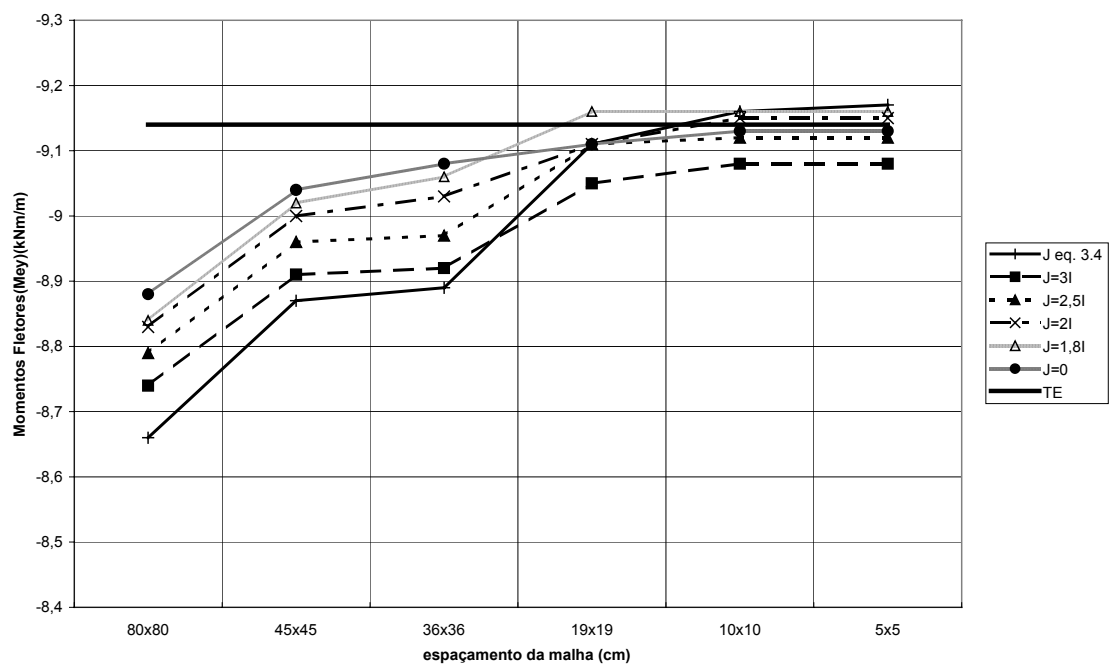


Figura 4.26 – Momentos fletores (my) em função da grelha

Figura 4.27 – Momentos fletores (m_x) em função da grelhaFigura 4.28 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha

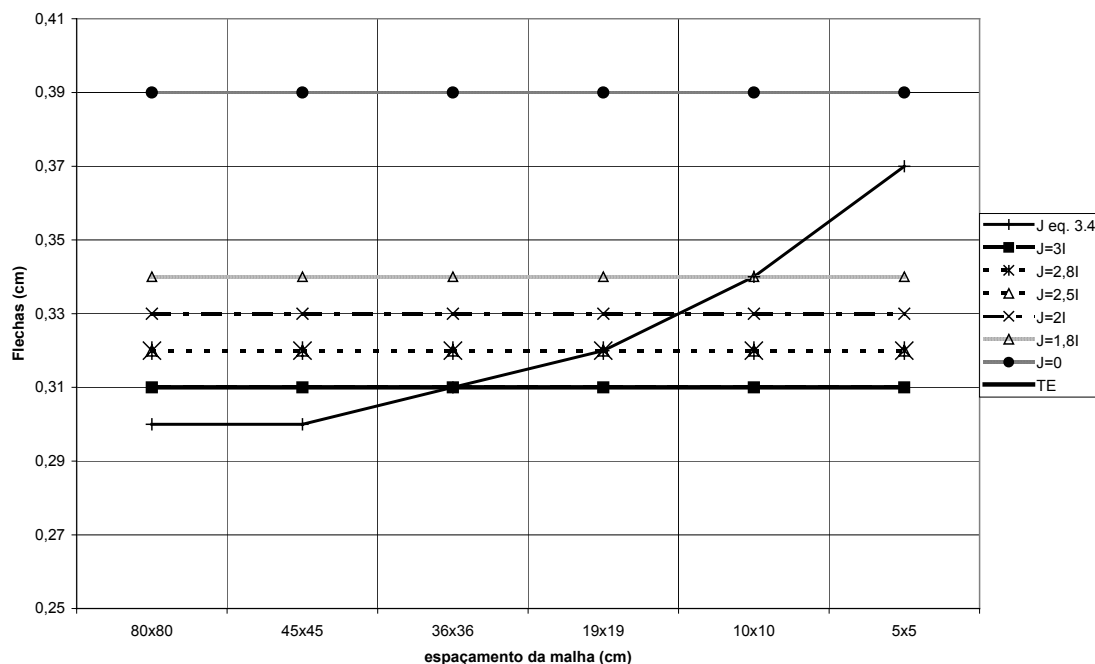


Figura 4.29 – Flechas em função da grelha

A relação J/I que apresentou os resultados de m_x mais próximos da teoria da elasticidade foi entre 1,8 e 2. É interessante observar que para os resultados de m_y nenhuma relação J/I pode ser considerada apropriada. Entretanto é para $J=0$ que os valores ficam mais próximos da TE, com uma diferença em torno de 24% (fazendo uma média para todas as grelhas utilizadas). Já para os momentos fletores negativos m_{xy} a relação $J/I = 2,5$ é a que apresentou os resultados mais próximos da TE. Pode-se notar que a variação obtida para o m_{xy} , para uma mesma grelha, quando varia-se a relação J/I é pequena, entretanto analisando-se todas as grelhas pode-se dizer que os valores obtidos para $J=0$ são os que apresentam as menores diferenças em relação à TE. No caso das flechas observa-se que as mesmas permanecem constantes para uma mesma relação J/I e para $J/I = 3$ as flechas encontradas resultam iguais às obtidas pela TE.

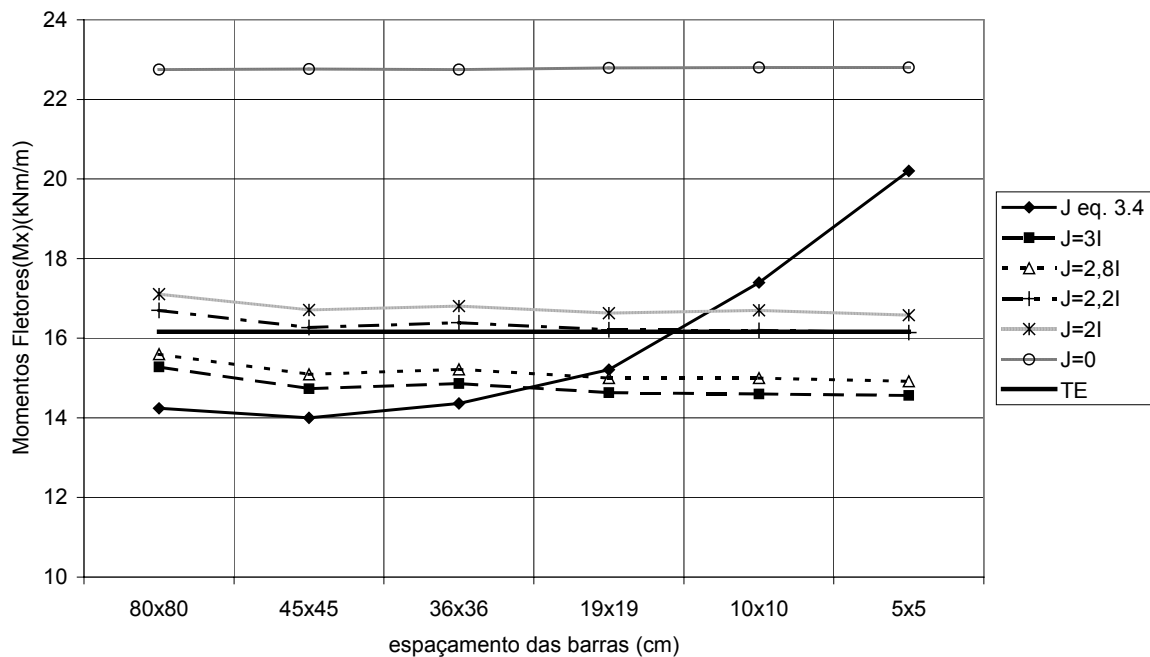
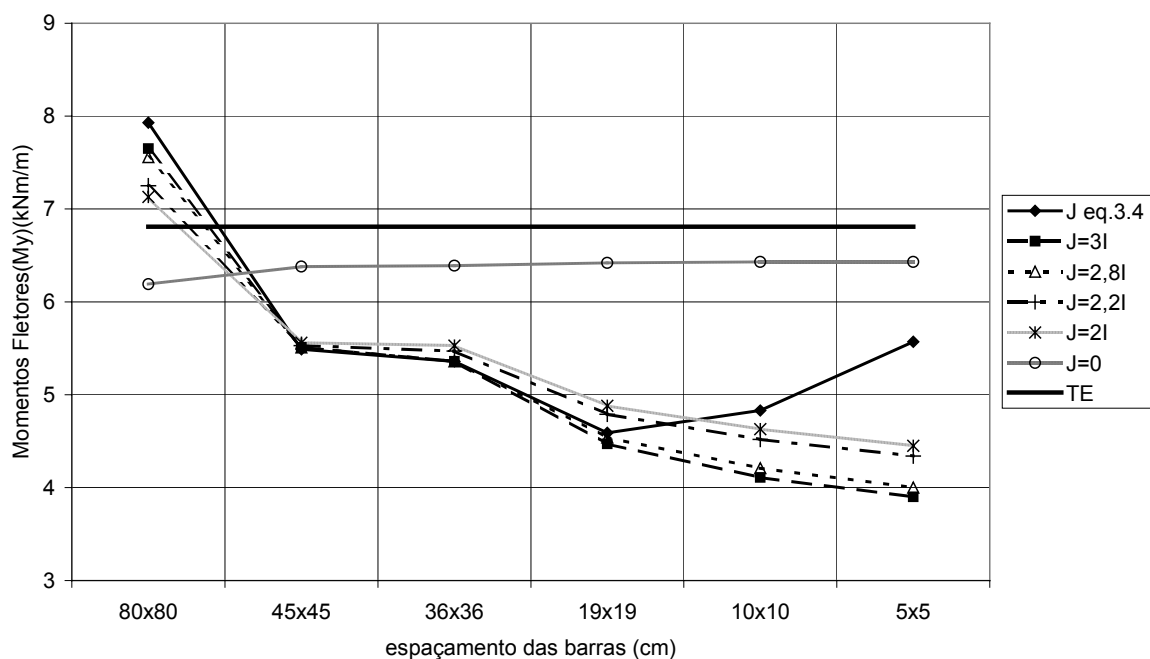
4.1.3 ESTUDO COMPARATIVO PARA LAJES RETANGULARES COM RELAÇÃO ENTRE LADOS $L_Y/L_X = 2$

EXEMPLO 1

- Laje maciça de 4 x 8m
- Espessura $h = 10$ cm
- Considerada apoiada nos quatro lados em apoios indeslocáveis
- Carga uniformemente distribuída $q = 10$ kN/m²
- Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 21000$ MPa
- Módulo de Elasticidade Transversal $G = 0,4 E \therefore G = 8400$ MPa

A laje será discretizada em 6 diferentes modelos de grelha, com barras espaçadas de: 80x80 cm , 45x45 cm, 36x36 cm, 19x19 cm, 10x10 cm e 5x5 cm.

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:
 - $m_x = 16,16$ kNm/m
 - $m_y = 6,81$ kNm/m
 - Flecha = 1,42 cm
- Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

Figura 4.30 – Momentos fletores (m_x) em função da grelhaFigura 4.31 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha

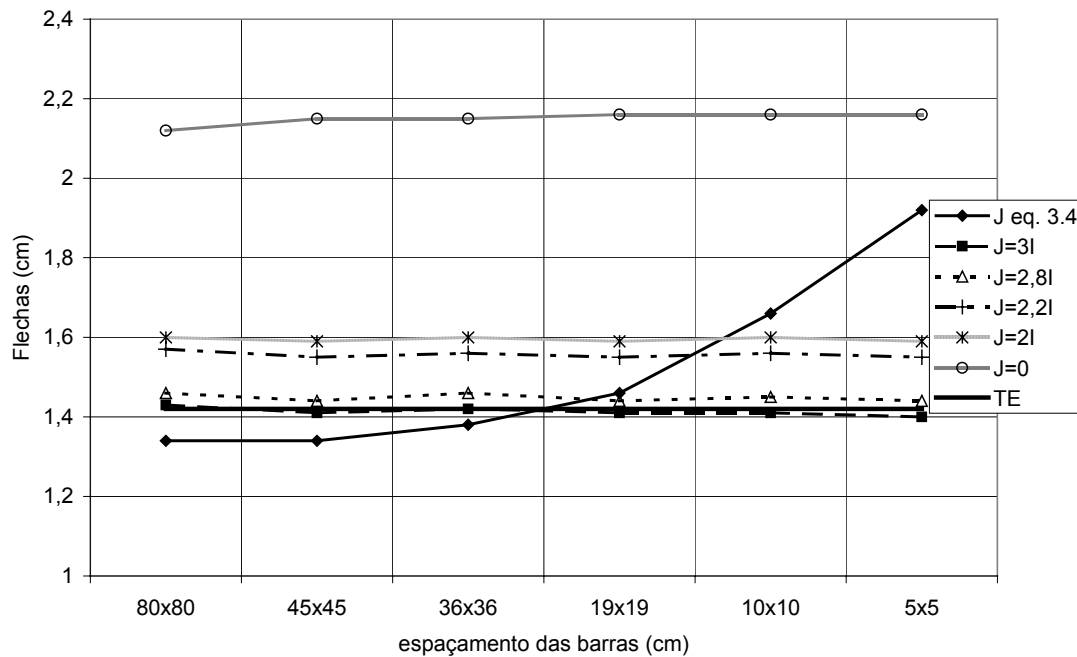


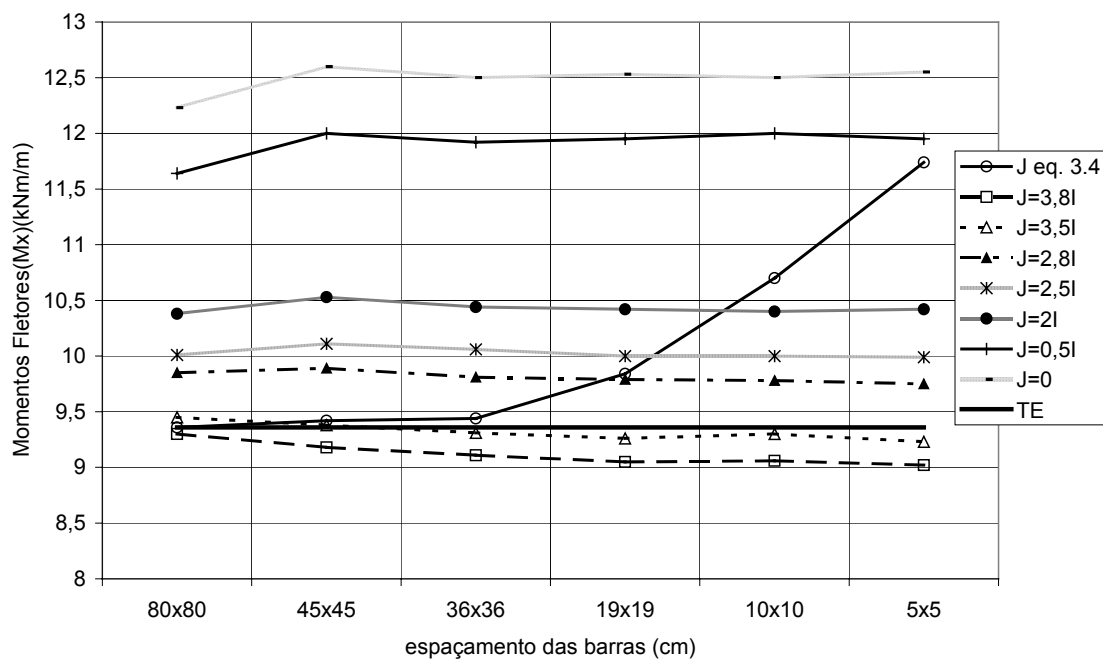
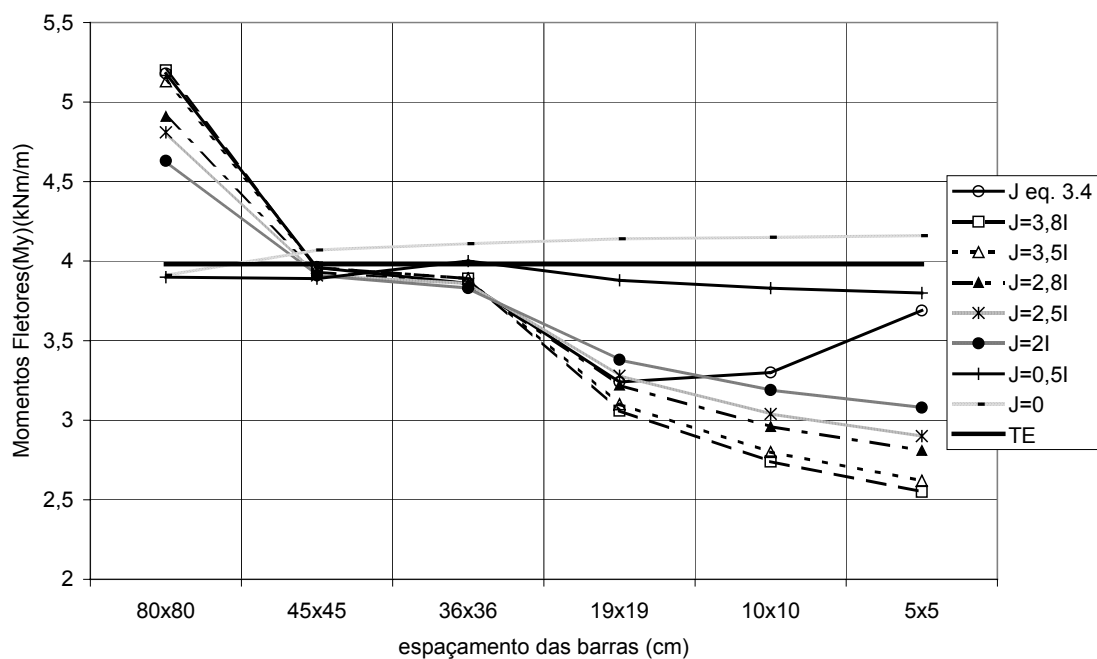
Figura 4.32 – Flechas em função da grelha

Em comparação com os valores obtidos pela TE, a relação que melhor aproximou os momentos m_x foi $J/I = 2,2$; já para as flechas esse valor foi de 3 e no caso dos momentos m_y , foi $J=0$ que apresentou os melhores resultados.

EXEMPLO 2

Mesmas características da laje anterior, porém considerando 2 lados adjacentes engastados e os outros dois apoiados.

- Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:
 - $m_x = 9,36 \text{ kNm/m}$
 - $m_y = 3,98 \text{ kNm/m}$
 - $m_{ex} = -19,05 \text{ kNm/m}$
 - $m_{ey} = -13,11 \text{ kNm/m}$
 - Flecha = 0,66 cm
- Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

Figura 4.33 – Momento fletores (m_x) em função da grelhaFigura 4.34 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha

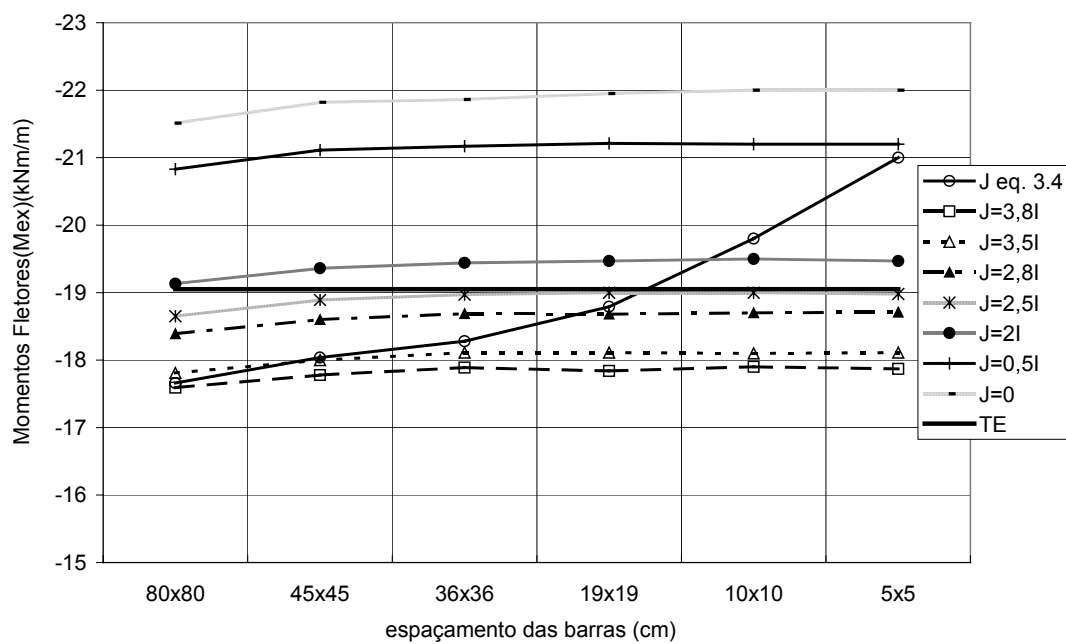


Figura 4.35 – Momentos fletores (mex) em função da grelha

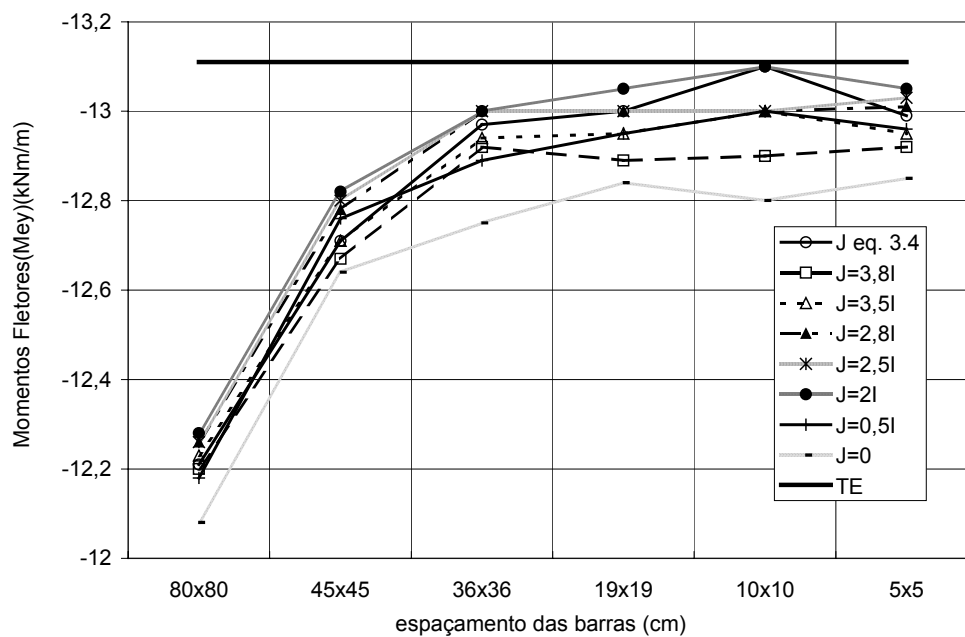


Figura 4.36 – Momentos fletores (mey) em função da grelha

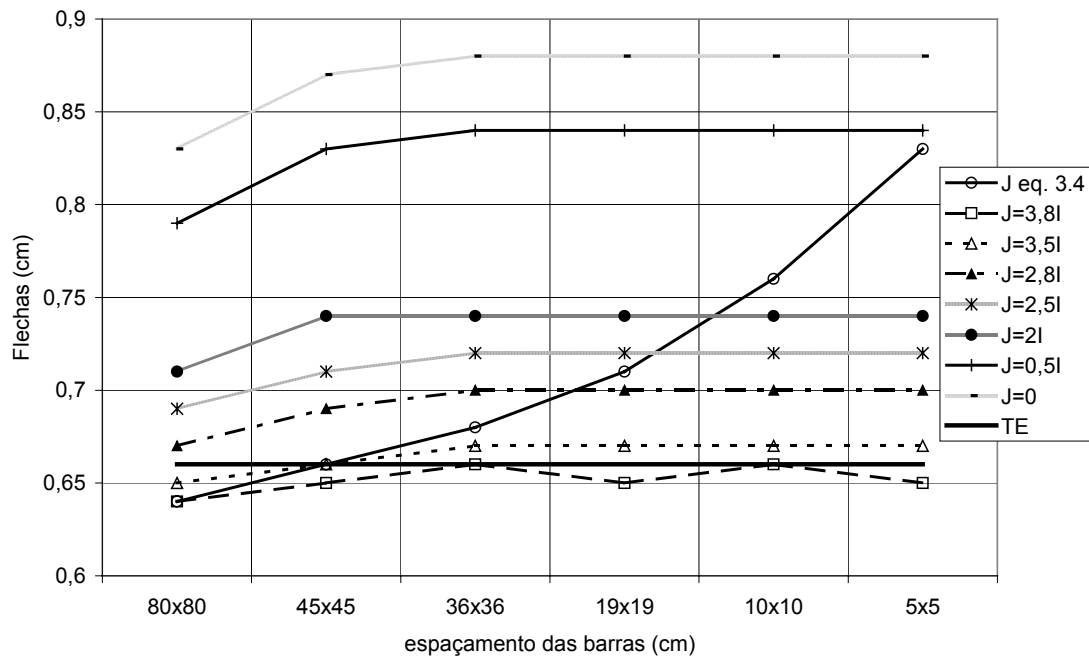


Figura 4.37 – Flechas em função da grelha

Em comparação com os valores obtidos pela TE, a relação J/I que melhor aproximou os momentos m_x foi em torno de 3,5. Para os momentos m_y esse valor variou entre 0,5 e 0. Já para m_{xy} essa relação foi em torno de 2,5 e para m_{ey} em torno de 2. Já para as flechas, o valor de J/I que chegou mais próximo da TE foi entre 3,8 e 3,5.

EXEMPLO 3

Mesmas características da laje do exemplo 1, porém considerando os 4 lados da laje engastados.

➤ Resultados obtidos através das Tabelas de Czerny (teoria da elasticidade), com $\nu = 0,2$:

- $m_x = 6,67 \text{ kNm/m}$
- $m_y = 2,8 \text{ kNm/m}$
- $m_{ex} = -13,33 \text{ kNm/m}$
- $m_{ey} = -9,14 \text{ kNm/m}$
- Flecha = 0,35 cm

➤ Resultados obtidos através da analogia de grelha e TE:

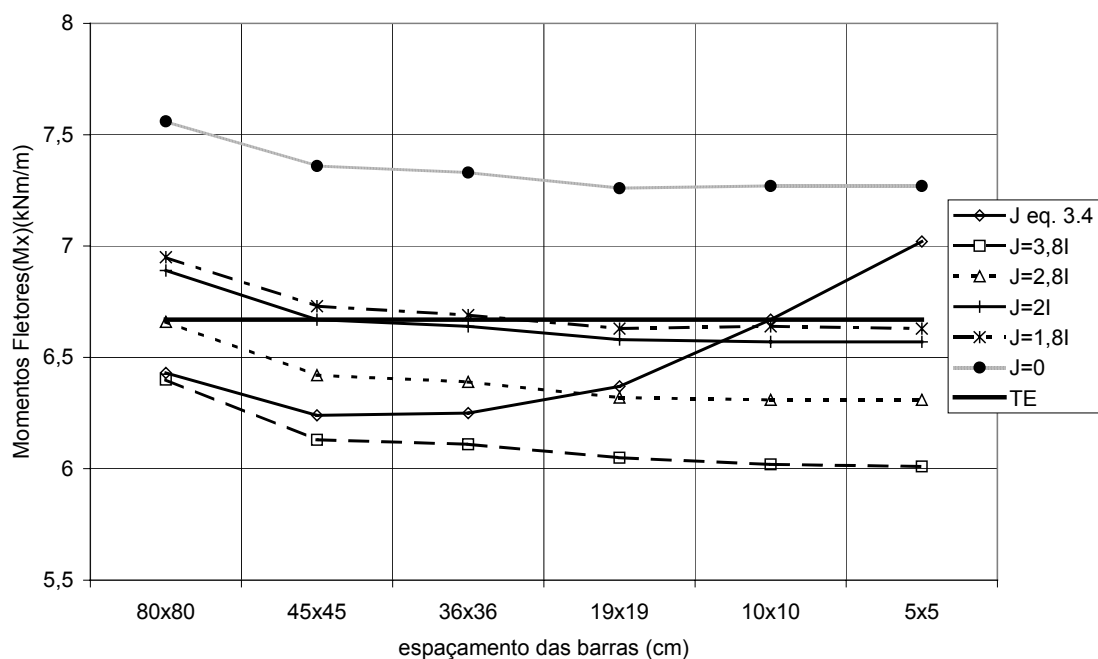


Figura 4.38 – Momentos fletores (m_x) em função da grelha

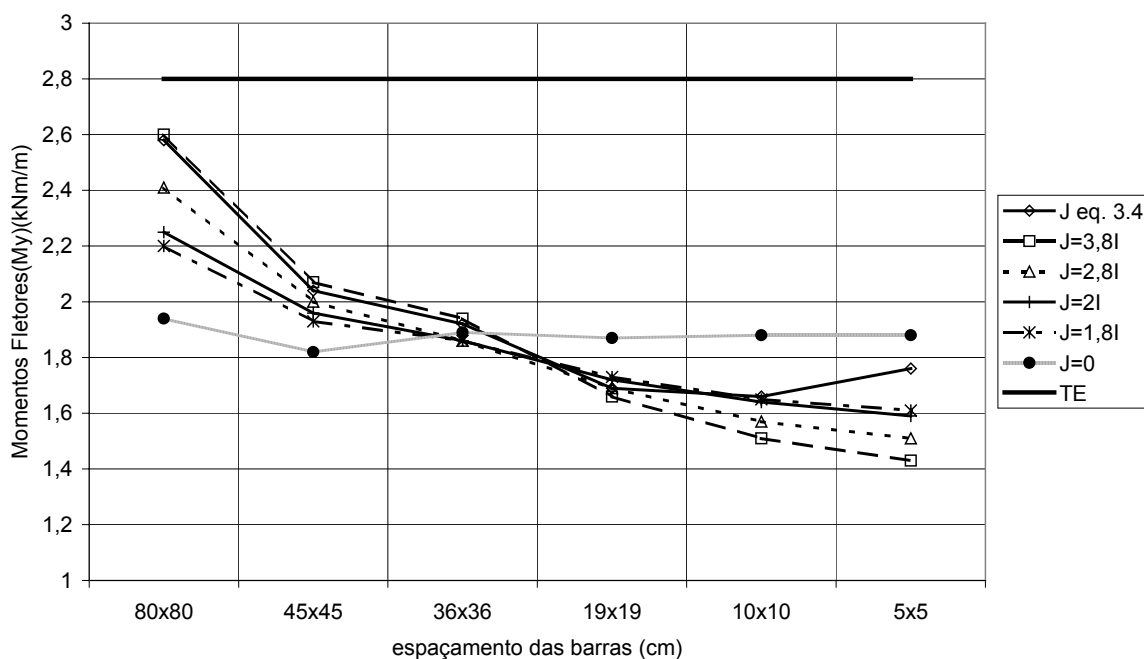
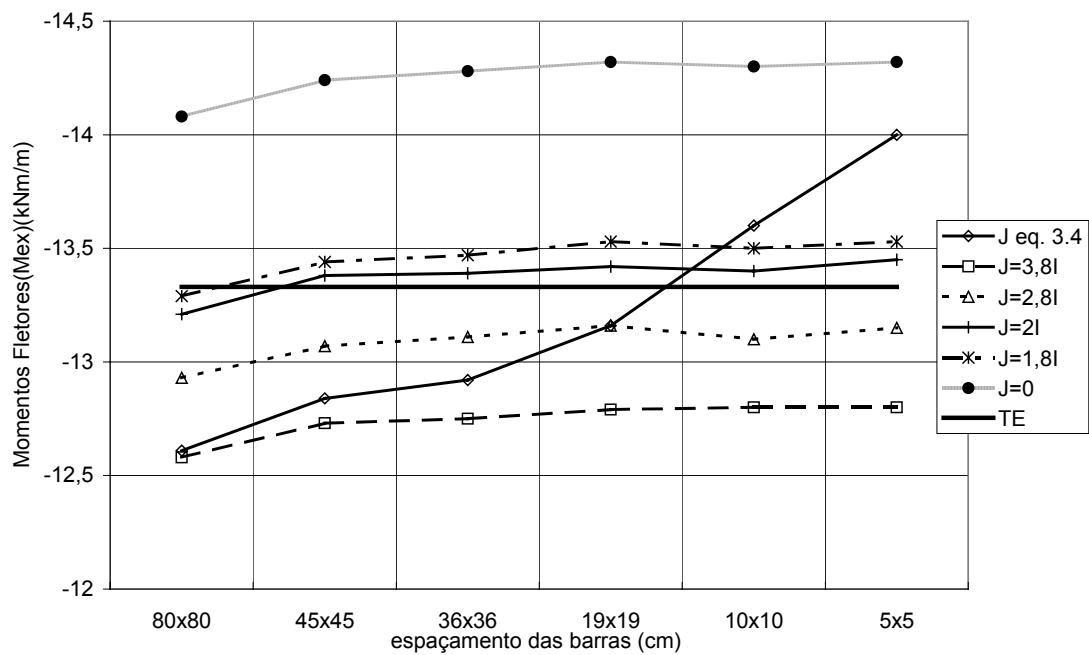
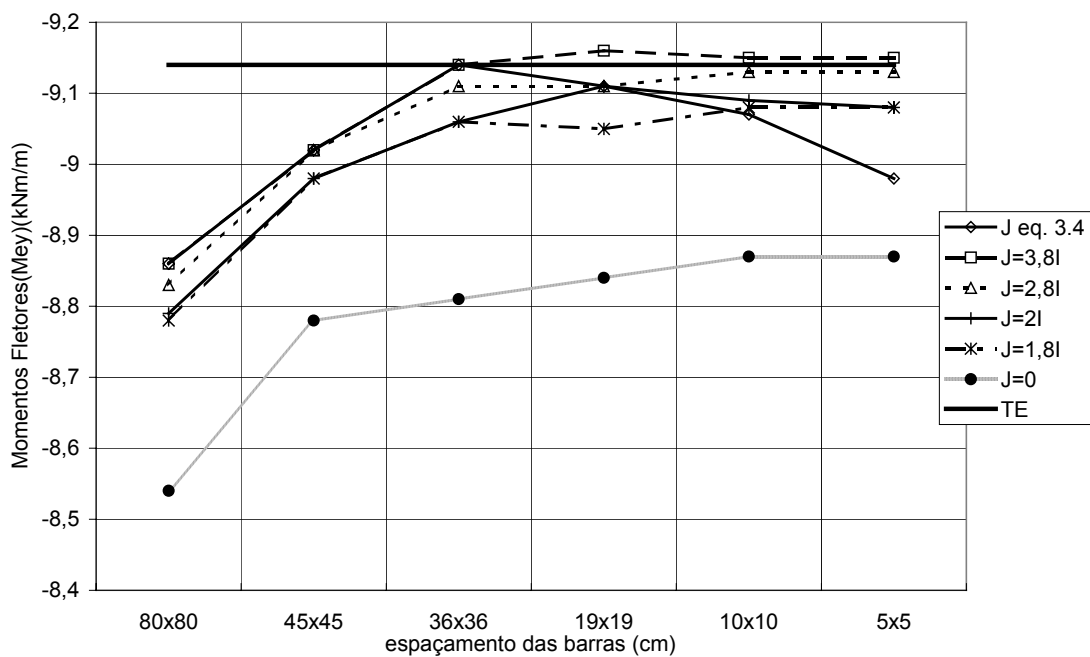


Figura 4.39 – Momentos fletores (m_y) em função da grelha

Figura 4.40 – Momentos fletores (m_{ex}) em função da grelhaFigura 4.41– Momentos fletores (m_{ey}) em função da grelha

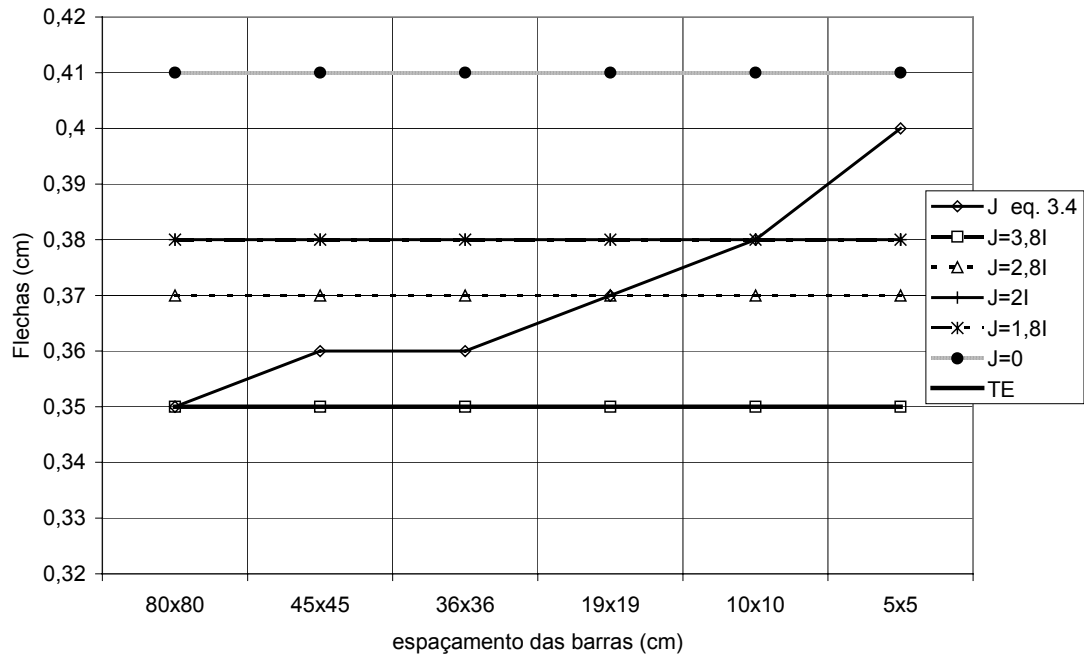


Figura 4.42– Flechas em função da grelha

Em comparação com os valores obtidos pela TE, os momentos fletores m_x foram melhor aproximados para uma relação J/I entre 1,8 e 2. Pode-se dizer que para os valores de m_y nenhuma relação foi adequada, pois as diferenças com a TE foram em média de 50%. A relação J/I que melhor aproximou os momentos fletores m_x foi em torno de 2 e os momentos m_y foi em torno de 3,8. É interessante observar que as flechas permaneceram constantes com a variação da grelha utilizada, para uma mesma relação J/I .

4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A UTILIZAÇÃO DA ANALOGIA DE GRELHA EM LAJES MACIÇAS

As considerações sobre este capítulo já são apresentadas para fornecer subsídios para os estudos posteriores.

Primeiramente é importante ressaltar que no diagrama de momentos fletores, para a grelha, existem descontinuidades, devido aos momentos torsores, conforme pode ser observado na Figura 4.43. Ou seja, se em um determinado nó existe uma descontinuidade \underline{x} no diagrama de momentos fletores é porque existe um momento torsor \underline{x} aplicado naquele nó. Devido a isso, os momentos fletores máximos em muitos casos não ocorrem no centro do vão, a não ser quando se utiliza uma rigidez à torção reduzida, pois neste caso as descontinuidades no diagrama de momentos fletores são bastante reduzidas, fazendo com que o momento máximo seja encontrado no nó central. Para os exemplos estudados, na maioria dos casos, o momento fletor máximo não ocorreu no centro da laje.

Foram analisados alguns casos de lajes onde as barras da grelha eram dispostas de tal forma que não existia um nó exatamente no centro da laje e os resultados foram comparados com os obtidos considerando-se a grelha disposta de forma a se obter um nó exatamente no centro da laje. Foi observado que as diferenças obtidas, por exemplo com a grelha de 80 x 80 cm foram de 28% para os momentos fletores e de 20% para os deslocamentos, já para a grelha de 10 x 10 cm essa diferença foi de 3% para esforços e deslocamentos. Ou seja, à medida que a diminui-se o espaçamento das barras da grelha essas diferenças diminuem.

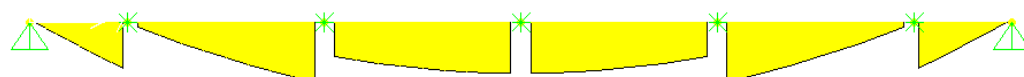


Figura 4.43 - Momentos fletores para a barra central da laje com grelha de 80 x 80 cm

A utilização do processo de analogia de grelha para o cálculo de lajes maciças, conforme o próprio nome diz é uma analogia e deve ser utilizada com alguns cuidados. Pois como pode ser observado nos exemplos analisados, a relação entre os lados e as condições de apoio influenciam na relação J/I que deverá ser utilizada para obter os resultados mais próximos da Teoria Elástica. A relação $J/I = 2$ sugerida por HAMBLY (1976) pode ser utilizada com alguns cuidados: essa relação poderia ser utilizada para m_x , m_{ex} e m_{ey} , pois de acordo com os resultados obtidos, percebe-se que para essa relação, há uma diferença máxima para os momentos, em relação a teoria da elasticidade, em torno de 10%. Entretanto para os momentos m_y (nos casos em que $L_y/L_x \neq 1$), essa relação não é adequada, devendo ser feito um estudo mais cuidadoso. Já para as flechas a relação $J/I = 3$ parece ser a mais adequada, visto que a diferença máxima obtida foi menor que 5%.

5 MODELAMENTO DE LAJES NERVURADAS

O cálculo dos esforços solicitantes e dos deslocamentos das lajes nervuradas têm sido feito utilizando-se métodos baseados na teoria das placas e na analogia de grelha.

Uma outra maneira de se modelar as lajes nervuradas, fazendo um modelo tridimensional, mostrada neste trabalho, é através dos elementos finitos, ou seja, discretizando a mesa e a nervura como elemento de casca.

O objetivo deste capítulo é mostrar as diferentes formas de se calcular uma laje nervurada, para posteriormente poder ser feita uma comparação dos resultados obtidos com esses modelos e indicar qual é o melhor modelo a ser adotado pelos projetistas estruturais.

5.1 MODELOS BASEADOS NA TEORIA DAS PLACAS

A NBR-6118/78 permite que as lajes nervuradas sejam calculadas como placas no regime elástico, desde que sejam observadas algumas prescrições dispostas no item 6.1.1.3 desta mesma norma, que são as seguintes:

- A distância livre entre nervuras não ultrapasse 100 cm;
- A espessura das nervuras não seja inferior a 4 cm e a da mesa não inferior a 4 cm nem $1/15$ da distância livre entre nervuras;
- O apoio das lajes for feito ao longo de uma nervura;
- Nas lajes armadas em uma direção, sejam colocadas nervuras transversais sempre que haja ações concentradas a distribuir ou quando o vão teórico for superior a 4m, exigindo-se duas nervuras, no mínimo, se esse vão ultrapassar 6 m;
- Nas nervuras com espessura inferior a 8 cm não seja colocado armadura de compressão no lado oposto à mesa.

Além dessas prescrições a Norma exige que menciona que a resistência da mesa à flexão deverá ser verificada sempre que a distância livre entre nervuras superar 50 cm ou houver carga concentrada no painel entre nervuras. E ainda: “ as nervuras deverão ser verificadas ao cisalhamento como vigas se a distância livre entre elas for superior a 50 cm e como laje em caso contrário”.

No projeto de revisão da NBR-6118:2001 existem algumas modificações com relação aos itens citados anteriormente:

- A espessura da mesa, quando não houver tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a $1/15$ da distância entre nervuras e não menor que 3 cm. O valor mínimo absoluto deve ser de 4 cm quando existirem tubulações embutidas de diâmetro máximo de 12,5 mm.
- A espessura das nervuras não deve ser inferior a 5 cm. Nervuras com espessura inferior a 8 cm não devem conter armadura de compressão.
- Para lajes com espaçamento entre eixos de nervura menor ou igual a 60 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa, e para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje.
- Para lajes com espaçamento entre eixos de nervura entre 60 e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas; permite-se essa verificação como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for menor que 90 cm e a espessura média das nervuras for maior que 12 cm.
- Para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

Pode-se perceber que as modificações foram pequenas, sendo que as principais foram com relação à verificação da nervura ao cisalhamento como laje, para espaçamento entre nervuras até 90 cm, desde que a espessura da nervura seja maior que 12 cm; e devido ao fato da revisão da NBR-6118:2001 deixar claro que para lajes com espaçamento entre nervuras maior que 110 cm, o cálculo da mesma deve ser feito como grelha, necessariamente.

Nos casos em que a laje obedece às limitações impostas pela Norma NBR-6118/78, a laje pode ser calculada como maciça por qualquer procedimento clássico ou simplificado, plenamente justificado. Entretanto no

projeto de revisão da NBR-6118:2001 consta uma observação muito importante:” Na falta de resultados mais precisos, a rigidez à torção deve ser considerada nula na determinação dos seus esforços solicitantes e deslocamentos”, já mostrando uma preocupação com a rigidez à torção no cálculo da laje nervurada.

Segundo FRANÇA & FUSCO (1997), para que uma laje nervurada possa ser dimensionada à flexão como se fosse uma laje maciça é necessário que a zona comprimida da seção transversal da laje nervurada seja tão resistente quanto seria se ela fosse realmente maciça. Para isto, as abas colaborantes de comprimento b_3 , Figura 5.1, devem garantir que a largura total b_f da mesa de compressão de cada nervura tenha um comprimento total igual ao espaçamento entre nervuras.

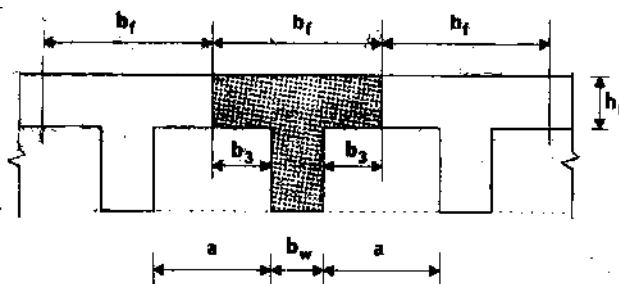


Figura 5.1 – Largura da mesa de compressão, FRANÇA & FUSCO (1997)

Deste modo, ainda de acordo com a Norma NBR-6118/78, segundo a regra de que a parte da laje que pode ser considerada como mesa colaborante (elemento de uma viga T), não deve superar 6 vezes a espessura da mesa, para cada lado da nervura medidos a partir da face da mesma, tem-se para cada nervura a mesa colaborante $b_f = b_w + 12h_f$. Ou seja, para os valores mínimos $b_w = 4\text{cm}$ e $h_f = 4\text{cm}$, resulta em $b_f \cong 50\text{cm}$.

Nestas condições, mesmo para as espessuras mínimas, se o espaçamento livre entre nervuras não superar 50 cm, a largura da seção resistente à compressão na flexão da laje nervurada será igual à largura total da laje.

Ainda segundo FRANÇA & FUSCO (1997), mesmo quando o espaçamento das nervuras for maior que 50 cm, a validade do cálculo de flexão da laje nervurada como se fosse laje maciça ainda fica assegurada pela

manutenção da colaboração total da mesa de compressão das nervuras, em virtude da condição exigida de ser $h_f > a/15$, pois desse modo resulta:

$$b_f = b_w + 12 h_f = b_w + 12/15 a \cong a.$$

Entretanto, a laje nervurada possui uma rigidez à torção menor do que a laje maciça. Devido a isso, os momentos torsores serão menores do que os calculados para uma laje maciça pela teoria da elasticidade. Por consequência, de acordo com a equação de equilíbrio das placas (equação 2.9), os momentos fletores e os deslocamentos sofrerão acréscimos significativos.

Segundo HAHN (1972), as normas alemãs exigem que os momentos das lajes nervuradas devem ser calculados sem levar em conta a rigidez à torção. Portanto os momentos obtidos podem ser multiplicados pelo coeficiente δ , que considera nula sua rigidez à torção. Este coeficiente depende das relações entre os lados e das condições de apoio dos bordos da laje. A Tabela 5.1 mostra esses coeficientes.

Tabela 5.1 – Coeficiente δ em ausência de rigidez à torção (HANN,1972)

Apoio	$\varepsilon =$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
1	δ	1,71	1,70	1,68	1,66	1,63	1,60	1,56	1,53	1,50	1,47	1,44	1,41	1,38
2a	δ_x	1,32	1,29	1,27	1,25	1,23	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14
	δ_y	1,51	1,47	1,44	1,41	1,38	1,35	1,32	1,29	1,27	1,25	1,24	1,23	1,22
2b	δ_x	1,51	1,54	1,56	1,58	1,58	1,59	1,59	1,58	1,56	1,54	1,52	1,50	1,47
	δ_y	1,32	1,32	1,33	1,34	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,34	1,33	1,32	1,30
3a	δ_x	1,16	1,15	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07
	δ_y	1,30	1,27	1,25	1,23	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,12
3b	δ_x	1,30	1,33	1,35	1,37	1,39	1,40	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,43
	δ_y	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,21	1,21	1,22	1,22	1,23	1,23	1,23
4	δ	1,30	1,30	1,29	1,29	1,28	1,27	1,26	1,24	1,22	1,21	1,20	1,20	1,19
5a	δ_x	1,18	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,12	1,11	1,10	1,10
	δ_y	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13	1,12	1,11
5b	δ_x	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24	1,23	1,22	1,22	1,21	1,20	1,19
	δ_y	1,18	1,19	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,19	1,18	1,17	1,17	1,16	1,15
6	δ	1,16	1,16	1,16	1,15	1,15	1,14	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,11	1,10

ε = relação entre os lados

Condições de apoio:

1 = laje apoiada nos quatro lados

2a = lado maior engastado

2b = lado menor engastado

3a = os dois lados maiores engastados

3b = os dois lados menores engastados

4 = dois lados adjacentes engastados

5a = os dois lados maiores e um menor engastados

5b = os dois lados menores e um maior engastados

6 = os quatro lados engastados

As fórmulas utilizadas para o cálculo do coeficiente δ são as seguintes:

$$\text{Apoio tipo 1: } \delta_x = \delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6} \times \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.1)$$

$$\text{Apoio tipo 2: } \delta_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{75}{32} \times \frac{\varepsilon^2}{5 + 2\varepsilon^4}\right)} \quad (5.2)$$

$$\delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6} \times \frac{\varepsilon^2}{5 + 2\varepsilon^4}\right)} \quad (5.3)$$

$$\text{Apoio tipo 3: } \delta_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{25}{18} \times \frac{\varepsilon^2}{5 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.4)$$

$$\delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6} \times \frac{\varepsilon^2}{5 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.5)$$

$$\text{Apoio tipo 4: } \delta_x = \delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{15}{32} \times \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.6)$$

$$\text{Apoio tipo 5: } \delta_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{9} \times \frac{\varepsilon^2}{2 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.7)$$

$$\delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{15}{32} \times \frac{\varepsilon^2}{2 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.8)$$

$$\text{Apoio tipo 6: } \delta_x = \delta_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{18} \times \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^4}\right)} \quad (5.9)$$

No caso em que se têm lados engastados, os momentos de engastamento permanecem os mesmos, não sendo multiplicados pelo coeficiente δ , que é utilizado somente para os momentos fletores positivos.

Como pode-se observar da Tabela 5.1, os momentos fletores podem resultar significativamente maiores quando não se considera a rigidez à torção das nervuras.

Quando é utilizada a teoria da elasticidade para o cálculo das flechas, torna-se necessário transformar a laje nervurada numa laje maciça de espessura equivalente, conforme mostra a Figura 5.2.

Segundo BARBIRATO (1997), a espessura da laje pode ser calculada através de uma equivalência em momento de inércia à flexão, através da equação 5.10 :

$$h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{12I}{a1}} \quad (5.10)$$

onde:

I = momento de inércia da seção transversal T

$a1$ = distância entre nervuras

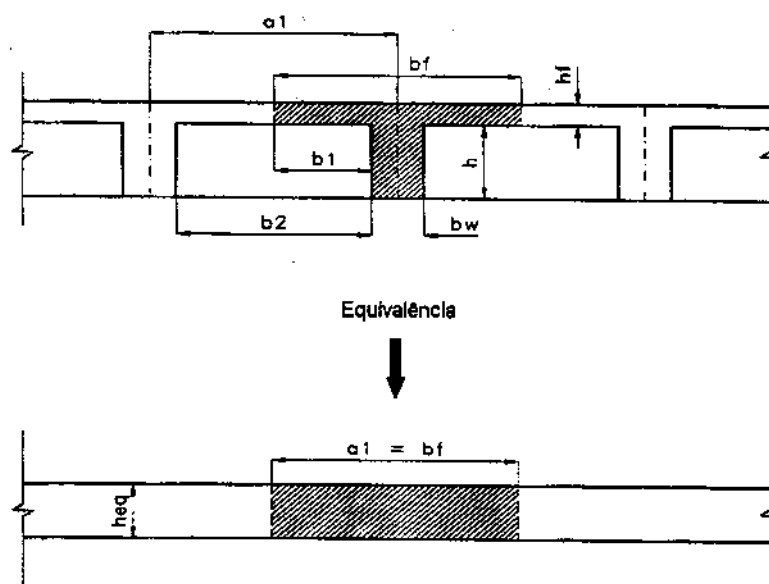


Figura 5.2- Transformação da laje nervurada em laje maciça equivalente, BARBIRATO (1997)

Na verdade, BARBIRATO (1997) utilizou o conceito de espessura equivalente para o cálculo da laje nervurada e modelou essa laje equivalente através de elementos finitos de placa. Ele desprezou a rigidez à torção através da redução a 1% do módulo de deformação transversal do concreto (G). Uma das vantagens desse modelo, segundo ele, é de não necessitar do conhecimento prévio da posição exata das nervuras. Além disso, os resultados obtidos com este modelo foram bons quando comparados com o modelo de grelha.

5.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Segundo REZENDE (1982), o método dos elementos finitos pode ser definido como um procedimento geral de discretização de problemas contínuos, delineados por expressões definidas matematicamente. O processo de discretização é feito de acordo com o seguinte princípio: o meio contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento se especifica em função de um número finito de parâmetros.

O método dos elementos finitos é uma modificação do método aproximado de RAYLEIGH – RITZ, em que o domínio de integração do problema é subdividido em regiões de dimensão finita denominadas elementos finitos, ou seja, o problema contínuo é discretizado. A vantagem é que desta forma, pode-se utilizar funções mais simples, polinômios de grau baixo, para descrever a solução aproximada dentro de cada região ou elemento. Para melhorar a precisão da solução, aumenta-se o número de elementos ao invés de aumentar-se o grau dos polinômios utilizados (LA ROVERE, 2001).

Neste trabalho o Método dos Elementos Finitos foi utilizado no modelamento das lajes nervuradas através da discretização da mesa e das nervuras das lajes nervuradas através de elementos de casca. Esse modelo foi utilizado pois parece apresentar resultados mais próximos dos reais, pois considera a estrutura como um todo, diferentemente da analogia de grelha, por exemplo, onde a capa de concreto da laje é considerada como parte da viga T, e portanto, desconectadas entre si, permitindo um deslocamento relativo que não corresponde bem a realidade. A Figura 5.3 mostra a influência da flexão da mesa na torção das nervuras.

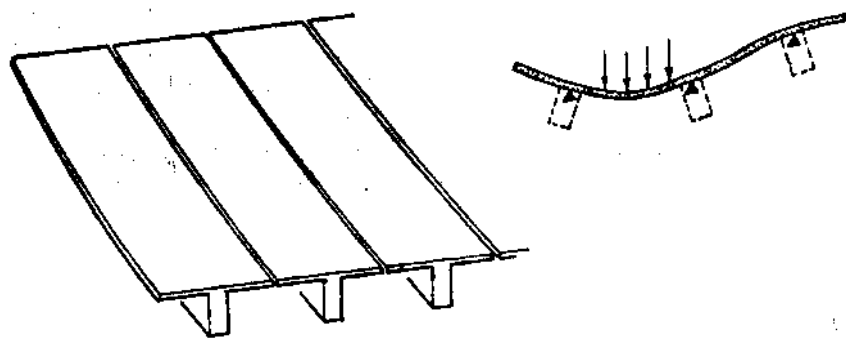


Figura 5.3 – Influência da flexão da mesa da laje nervurada, na torção das nervuras, HAMBLY (1976)

Neste trabalho, será utilizado um programa de elementos finitos denominado SAP2000, que permite a análise de diversos problemas.

A seguir serão descritos os passos necessários para a entrada de dados e obtenção dos resultados.

Deve-se salientar que a entrada de dados pode ser feita via arquivo ou através de entrada gráfica. Nos exemplos mostrados neste trabalho foi utilizada a entrada gráfica, por ser mais rápida e fácil de ser utilizada.

- Primeiramente deve-se dividir a estrutura em um conjunto de elementos finitos adequados à solução do problema. No caso do SAP2000, para análise da laje nervurada, o programa dispõe de elementos denominados SHELL, que são elementos adequados para solucionar problemas de placas, cascas e membranas em duas e em três dimensões. O elemento SHELL tipo casca plano é a associação do elemento de placa com o elemento de membrana. Portanto o elemento de casca apresenta, simultaneamente, as tensões de flexão de uma placa, que produzem momentos fletores e torsores (equação 5.12b), e as tensões de membrana, que correspondem às tensões de um problema de estado plano de tensões. Elas agem tangente à superfície média e produzem forças por unidade de comprimento. As forças de membrana são:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (5.11)$$

- Os elementos SHELL, utilizados neste trabalho, possuem elementos de 4 nós de formulação isoparamétrica, e não incluem deformação por cisalhamento (casca fina).
- O comportamento de membrana inclui duas componentes de rigidez à translação no plano e uma componente de rigidez rotacional na direção normal ao plano do elemento, diferente do modelo usual do estado plano de tensões, onde apenas as duas componentes de rigidez à translação no plano são consideradas, conforme pode ser visto em GHALI & NEVILLE (1997).
- O comportamento de placa inclui duas componentes de rigidez rotacional fora do plano e uma componente de rigidez à translação na direção normal ao plano do elemento, não incluindo nenhum efeito de deformação por cisalhamento (elemento de placa fina).
- O comportamento de casca plana é a sobreposição do comportamento de membrana com o comportamento de placa.
- Como já foi dito os dados são fornecidos, neste caso, graficamente. Primeiro deve ser fornecida a malha, e posteriormente são definidos os

tipos de elementos a serem utilizados (membrana, placa ou casca), os parâmetros mecânicos dos elementos, tais como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e os parâmetros geométricos, como a espessura do elemento.

- Em seguida deve-se definir as restrições nodais, ou seja, os graus de liberdade impedidos dos nós da estrutura que são considerados vínculos ou apoios.
- As cargas aplicadas nos elementos SHELL são definidas diretamente na tela. Neste trabalho toda carga existente na laje nervurada foi considerada uniformemente distribuída na mesa, sem cargas nas nervuras. Ou seja, até o peso próprio da nervura foi considerado aplicado na mesa, à fim de que, em todos os exemplos, a carga aplicada fosse a mesma, para que se pudesse comparar os resultados.
- Após a entrada de dados, o programa faz a montagem do modelo com seus parâmetros e inicia a solução montando a matriz de rigidez da estrutura. Em seguida resolve o sistema de equações lineares para a obtenção dos deslocamentos nodais.
- Os resultados dos esforços e deslocamentos podem ser obtidos através da listagem de arquivos de saídas numéricas ou diretamente na tela (saídas gráficas). Para estas saídas de dados o programa utiliza uma convenção de sistema de coordenadas locais para cada elemento, com eixos 1, 2 e 3 e um sistema global X, Y e Z, sendo ambos orientados pela regra da mão-direita. O sistema de coordenadas global é definido arbitrariamente, mas neste trabalho o eixo Z positivo é orientado na vertical para cima e o plano X e Y é horizontal, como mostra a Figura 5.4. A orientação dos eixos locais 1, 2 e 3, neste trabalho, é mostrada na Figura 5.5.

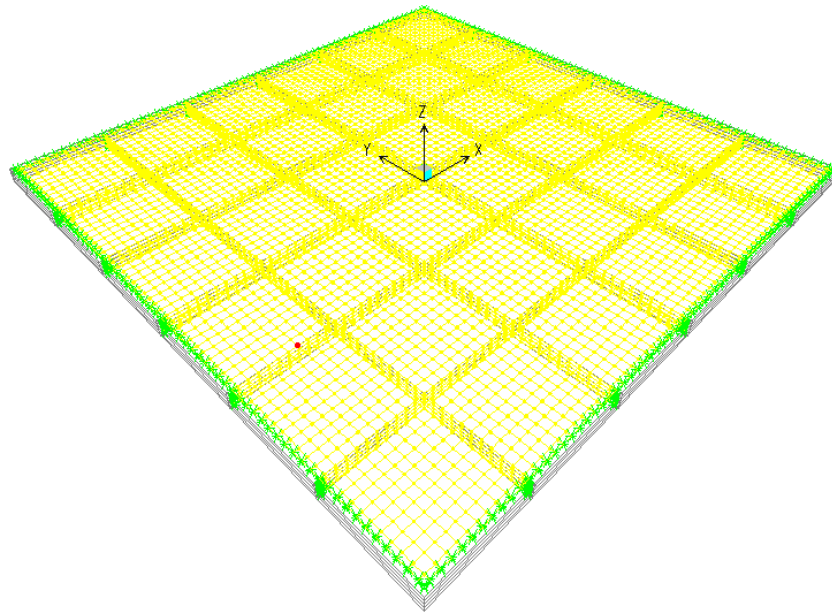


Figura 5.4 – Laje nervurada, onde mesa e nervuras são discretizadas por elementos finitos de casca (SHELL), com os eixos globais indicados

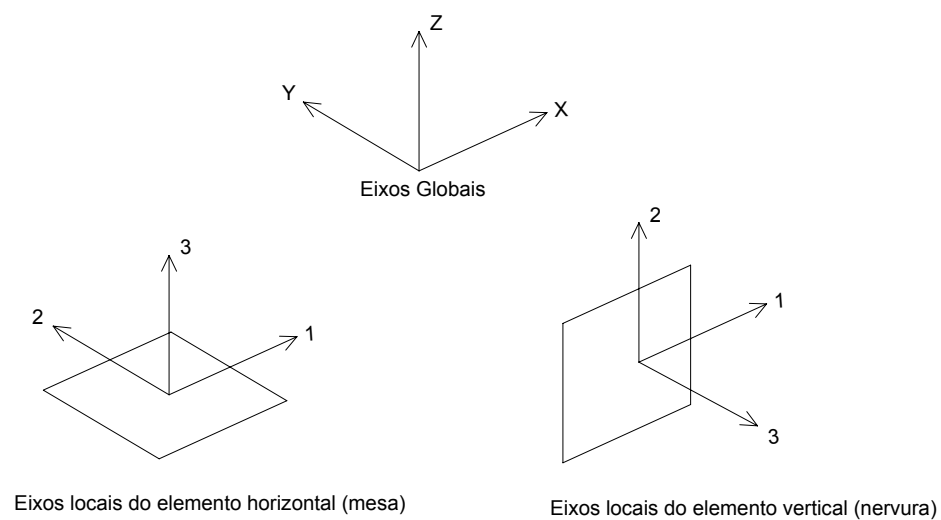


Figura 5.5 – Coordenadas globais e locais dos elementos do SAP2000

- A convenção de sinais para os esforços é como mostra a Figura 5.6.

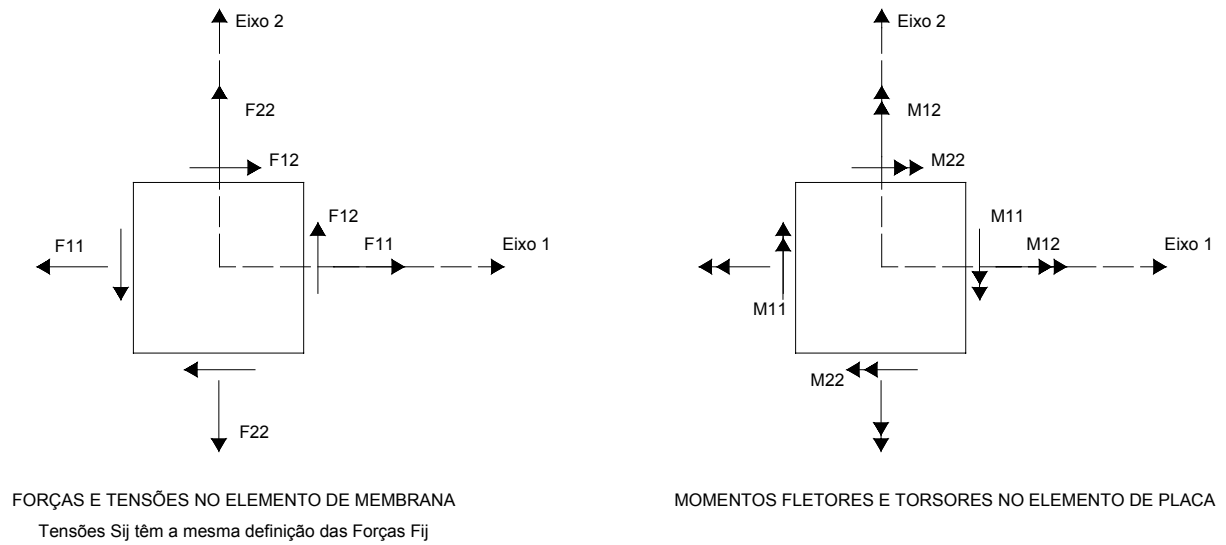


Figura 5.6 – Esforços no elemento SHELL

Quando utilizou-se esse modelo para a discretização da laje nervurada sem levar em conta a rigidez à torção da nervura, pensou-se, primeiramente, em considerar 1% do módulo de deformação transversal (G) das nervuras. Ao se considerar essa minoração em G , a rigidez do elemento diminuiria, e τ_{xy} seria minorado (conforme equação 5.12a) e conseqüentemente, de acordo com a equação 5.12b, também o seria o momento torsor M_{xy} . Entretanto, como a nervura está sendo discretizada como elemento de casca, e portanto existe a força de membrana N_{xy} , pode-se perceber através da equação 5.11 que esta força também seria minorada, invalidando os resultados.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{1-\nu^2} & -\frac{E}{1-\nu^2} \nu & 0 \\ -\frac{E}{1-\nu^2} \nu & -\frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.12a)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ -M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z \, dz \quad (5.12b)$$

Portanto foi utilizado o artifício de discretizar as nervuras como elemento de estado plano de tensões, onde os esforços só existem no plano e conseqüentemente não há torção da nervura.

5.3 ANALOGIA DE GRELHA PARA AS LAJES NERVURADAS

A utilização da analogia de grelha para lajes nervuradas parece ser o modelo mais indicado para análise e projeto desse tipo de laje, quando comparado com a aplicação simples da teoria da elasticidade, calculando lajes nervuradas como lajes maciças, que pode levar a erros consideráveis na avaliação dos esforços e deslocamentos. A utilização de um modelo mais sofisticado como o modelo de elementos finitos, descrito anteriormente, parece fornecer resultados mais realistas da laje nervurada, entretanto ele é muito mais complicado de ser utilizado, e requer um cuidado especial no modelamento, principalmente nas considerações dos graus de liberdade, e na obtenção dos resultados. Já o modelo de analogia de grelha é mais simples de ser utilizado, e os resultados são interpretados facilmente pelos engenheiros, pois como no caso da laje nervurada os esforços mais importantes são os momentos fletores e torsores, os mesmos são obtidos diretamente na saída dos resultados e em muitos programas podem ser visualizados graficamente. Além disso, como o modelo de analogia de grelha trabalha com elementos de barra, os engenheiros têm mais facilidade de interpretar fisicamente esse tipo de elemento estrutural, diferentemente dos elementos finitos.

Os exemplos das lajes nervuradas por analogia de grelha foram feitos utilizando o programa SAP2000, formulado através do método dos deslocamentos, o qual permite uma grande versatilidade com relação a geometria, carregamento, condições de apoio e diversos parâmetros relacionados com a rigidez das grelhas. Esse programa permite que a entrada de dados seja feita graficamente ou via arquivo. Nos exemplos das lajes nervuradas modeladas por analogia de grelha foi utilizada a entrada gráfica de dados, que é bastante simples de ser feita.

O processo de analogia de grelha para lajes nervuradas segue o mesmo procedimento utilizado para lajes maciças, com pequenas modificações que serão mostradas a seguir.

5.3.1- MODELAGEM

No caso das lajes nervuradas, as mesmas podem ser consideradas como uma grelha de pequenas vigas (nervuras) longitudinais e transversais. Portanto, neste caso, a malha utilizada no processo de analogia de grelha vai apresentar as barras coincidindo com o centro das nervuras, como pode ser observado na Figura 5.7.

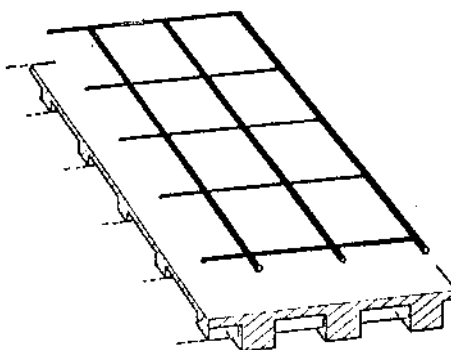


Figura 5.7 – Malha da grelha para laje nervurada, HAMBLY (1976)

Os estudos com lajes maciças por analogia de grelha foram muito importantes para a correta modelagem e interpretação dos resultados das lajes nervuradas.

Com relação ao sistema de coordenadas e graus de liberdade, esses serão utilizados exatamente da mesma forma citada anteriormente para a analogia de grelha aplicada a lajes maciças.

5.3.2- PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS

As barras da grelha de uma laje nervurada representam uma nervura mais uma faixa da mesa da laje, e desta forma a seção transversal da barra

não será retangular como era para a laje maciça, o que acarretará em algumas modificações nas propriedades das mesmas, conforme é descrito a seguir.

Rigidez a flexão das nervuras:

Por ser uma laje nervurada, normalmente a rigidez à flexão das barras da grelha é adotada como a rigidez de uma seção T, considerando-se a largura colaborante da laje obtendo-se, então:

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i d_i^2 \right) \quad (5.13)$$

onde:

b_i = largura da porção i da seção transversal;

h_i = altura da porção i da seção transversal;

A_i = área da porção i da seção transversal;

d_i = distância do centro de gravidade da porção i ao centro de gravidade da seção.

Entretanto KENNEDY & BALI (1978), propuseram uma maneira um pouco diferente de calcular o momento de inércia deste tipo de seção: como a mesa da seção T da barra está na verdade representando uma porção da capa da laje nervurada, a área da mesa deve ser majorada pelo fator $\frac{1}{1-\nu^2}$ para levar em consideração a influência do coeficiente de Poisson. Desta forma o momento de inércia desta seção é calculado da seguinte forma:

$$I = \frac{b_f h_f^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{b_f h_f (y_{cg} - \frac{h_f}{2})^2}{(1-\nu^2)} + \frac{b_w h^3}{12} + b_w h (h_f + \frac{h}{2} - y_{cg})^2 \quad (5.14)$$

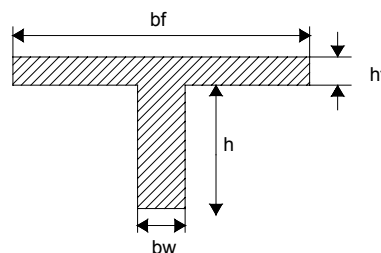


Figura 5.8 – Seção transversal de seção T da laje nervurada

Onde:

$$y_{cg} = \frac{b_w h (h_f + \frac{h}{2}) + \frac{b_f h_f^2}{2(1-\nu^2)}}{b_w h + \frac{b_f h_f}{(1-\nu^2)}} \quad (5.15)$$

y_{cg} : ordenada do centróide da seção T, medido a partir da face superior da nervura

Nos exemplos mostrados adiante serão analisadas essas duas equações para o cálculo de I e qual a sua influência nos resultados obtidos.

Rigidez à torção das barras da grelha:

Com relação ao momento de inércia à torção, muito se tem discutido a respeito. Alguns autores (LEONHARDT, 1978) afirmam que a mesma deve ser desprezada, devido à baixa resistência à torção das nervuras, além da pequena largura das mesmas impedir a colocação de armaduras para absorver os esforços oriundos da torção. Segundo o Projeto de Revisão da NBR 6118:2001, supondo-se a fissuração da peça, deve-se considerar apenas 15% da inércia à torção bruta.

SUSSEKIND (1985) recomenda considerar como inércia à torção, em peças de concreto armado (com fissuração), um valor em torno de 20% da inércia da seção homogênea (estádio I).

Para uma barra de seção transversal T, o momento de inércia à torção integral desse tipo de seção pode ser calculado da seguinte forma (GERE e WEAVER, 1980):

$$J = \sum_{i=1}^n \beta e_i^3 f_i \quad (5.16)$$

onde:

e_i = menor dimensão da seção transversal;

h_i = maior dimensão da seção transversal

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f} \right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4} \right) \quad (5.17)$$

Entretanto, KENNEDY & BALI (1979), propuseram, para o cálculo de J , duas modificações em relação à equação 5.16, conforme foi mostrado no item 2.3:

- A primeira modificação diz respeito à contribuição da mesa da seção para J .
- $J = \frac{1}{2} \beta e^3 f$ (5.18)

Ou seja, é inserido um fator de redução $\frac{1}{2}$ para considerar que a mesa está representando uma parte da laje, a qual é diferente da mesa de uma seção T isolada. Essa modificação também foi recomendada por HAMBLBY (1976).

- A segunda modificação também diz respeito à parcela de contribuição da mesa da seção, mas é devido ao enrijecimento provocado pelas nervuras na direção ortogonal à seção transversal que se está analisando. Esta modificação no cálculo de J também está descrita no capítulo 2.3.

Nos exemplos mostrados adiante, o momento de inércia à torção será calculado de várias maneiras e os resultados serão posteriormente comparados com os obtidos através do modelo de elementos finitos.

Parâmetros do concreto:

O módulo de elasticidade longitudinal tangente do concreto é calculado, para os exemplos de laje nervurada, através das recomendações do projeto de revisão da norma NBR-6118/2001, conforme a equação 5.19 :

$$E_{ci} = 5600 \sqrt{fck} \quad (5.19)$$

Neste trabalho será considerado o módulo de elasticidade secante do concreto considerado, também calculado conforme a NBR-6118/2001, através da equação 5.20:

$$E_c = 0,85 \cdot E_{ci} \quad (5.20)$$

Como já foi visto o módulo de deformação transversal do concreto G é obtido através da equação 5.21 :

$$G = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad (5.21)$$

Porém LEONHARDT (1978) verificou que numa peça de concreto armado, mesmo no estágio I, ocorre uma queda na rigidez à torção, devido à presença de microfissuras na superfície da peça. Portanto para desprezar os efeitos provenientes da torção ele recomenda dividir G por 100. Ou como TAKEYA (1985), que para considerar o efeito de perda de rigidez à torção, recomenda adotar-se $G = 0,15 E_c$, ou seja, reduzir o módulo de deformação transversal do concreto.

Entretanto neste trabalho foi adotado $G = 0,4 E_c$, conforme recomenda a NBR-6118/78, admitindo-se o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Nos exemplos de analogia de grelha para as lajes nervuradas, o efeito de redução da rigidez à torção foi considerado na determinação da inércia à torção.

Rigidez a torção das vigas de borda:

Normalmente a rigidez à torção das vigas de borda é desprezada, devido ao inconveniente da necessidade de verificação se a seção transversal da viga é capaz de absorver os esforços oriundos da torção, além de ter que armá-la para suportar tais esforços. Desse modo, nos exemplos que serão mostrados adiante, essa rigidez será desprezada.

5.3.3- CARREGAMENTO

As ações atuantes na laje nervurada são basicamente as mesmas presentes nas lajes maciças com a adição do peso de enchimento, que vai depender do peso específico do material empregado.

Neste trabalho, o enchimento considerado para as lajes nervuradas foram os blocos de EPS (poliestireno expandido), portanto o seu peso pode ser desprezado.

Todas as cargas são consideradas uniformemente distribuídas na área da laje nervurada e a distribuição das cargas na grelha é feito da mesma forma citada anteriormente para as lajes maciças.

Nos exemplos de analogia de grelha utilizados para as lajes nervuradas as cargas foram consideradas, assim como nas lajes maciças, distribuídas ao longo das barras da grelha.

6 EXEMPLOS DE MODELAGEM

6.1 LAJES NERVURADAS DISCRETIZADAS POR ANALOGIA DE GRELHA

Em todos os exemplos analisados foi escolhido um número ímpar de faixas, de forma que se tenha sempre uma nervura no centro da laje.

Os exemplos de 1 a 4 foram feitos utilizando a mesma dimensão da laje (quadrada), carregamento, espessura da mesa e largura da nervura, mudando apenas o espaçamento entre as nervuras, para que se pudesse fazer um estudo da influência do espaçamento da nervura no comportamento da laje nervurada.

Os exemplos 5 e 6 tratam de lajes retangulares, com relação entre os lados igual a 1,5 e 2, respectivamente, e o exemplo 7 trata de uma laje retangular (não-quadrada) de dimensões um pouco maiores do que dos exemplos 1 a 4, onde foram feitas algumas análises discretizando a mesa como elementos finitos.

6.1.1 LAJES QUADRADAS

EXEMPLO 1 - Laje quadrada de 5,2 por 5,2 m com nervuras nas duas direções. Neste exemplo será adotada distância livre entre nervuras de 30 cm, conforme a Figura 6.1:

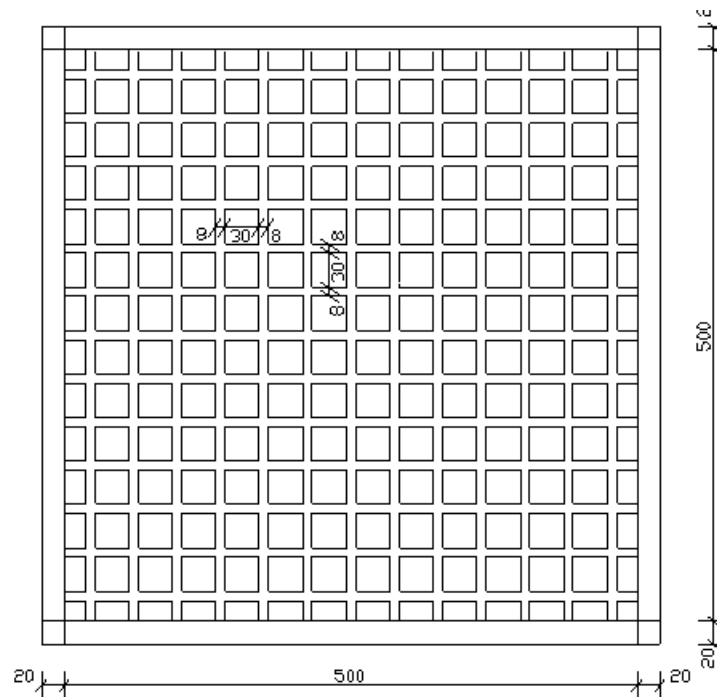


Figura 6.1- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 30 cm

O concreto utilizado deverá ter resistência característica à compressão aos 28 dias (f_{ck}) de 20 MPa. Para este concreto adotado, tem-se:

Módulo de deformação longitudinal secante (E_{cs}):

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad \text{com} \quad E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}}$$

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 21287,36 \text{ MPa} = 2,13 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade transversal (G):

$$G = 0,4 E_{cs}$$

$$G = 0,4 \times 21287,36 = 8514,95 \text{ MPa} = 8,52 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

A sobrecarga de utilização adotada é de 2,00 kN/m².

O pré-dimensionamento pode ser feito de acordo com a expressão empírica proposta por MACHADO (1983) e adaptada por STRAMANDINOLI JR. (2000) para levar-se em conta a variação da resistência do concreto:

$$d = 1,5(\alpha - 0,1n) \ell \quad (\text{cm}) \quad (6.1)$$

onde:

d = altura útil da laje em cm

n = nº de bordas engastadas

ℓ = menor dos dois valores : ℓ_x ($\ell_x \leq \ell_y$) e $0,7 \ell_y$ (em m)

$$\alpha = \frac{4,066}{\sqrt[6]{fck + 3,5}} \quad (6.2)$$

fck é a resistência característica à compressão do concreto, em MPa.

$d \cong 13$ cm

Adota-se $h=16$ cm.

A altura da mesa, segundo a NB-1/78, deverá ser igual a $a/15$, não inferior a 4cm, devendo ser neste caso igual a 4 cm. A largura da nervura (b_w) será adotada, em todos os casos, igual a 8 cm.

As ações atuantes serão, então:

Peso próprio da mesa = $0,04 \times 25 = 1,00 \text{ kN/m}^2$

Peso próprio das nervuras = $\frac{[(0,08 \times 0,12 \times 0,38) + (0,08 \times 0,12 \times 0,3)] \times 25}{0,38 \times 0,38} = 1,13 \text{ kN/m}^2$

Revestimento = $1,00 \text{ kN/m}^2$

Sobrecarga de utilização = $2,00 \text{ kN/m}^2$

Total das ações atuantes = $5,13 \text{ kN/m}^2$

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.2:

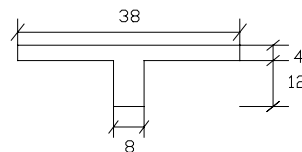


Figura 6.2 – Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 1

Da geometria da seção determinam-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 5,1 cm

Momento de inércia à flexão da seção T (através da eq. 5.13): $I = 5120,35 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T (através da eq. 5.16): $J = 1958,91 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10, obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 11,74 \text{ cm}$

Também foram feitas outras análises calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1979) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtém-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 5,02 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 5188,01 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2782,46 \text{ cm}^4$

EXEMPLO 2- Mesma laje do exemplo anterior, porém neste caso será adotada distância livre entre nervuras de 50 cm, conforme a Figura 6.3:

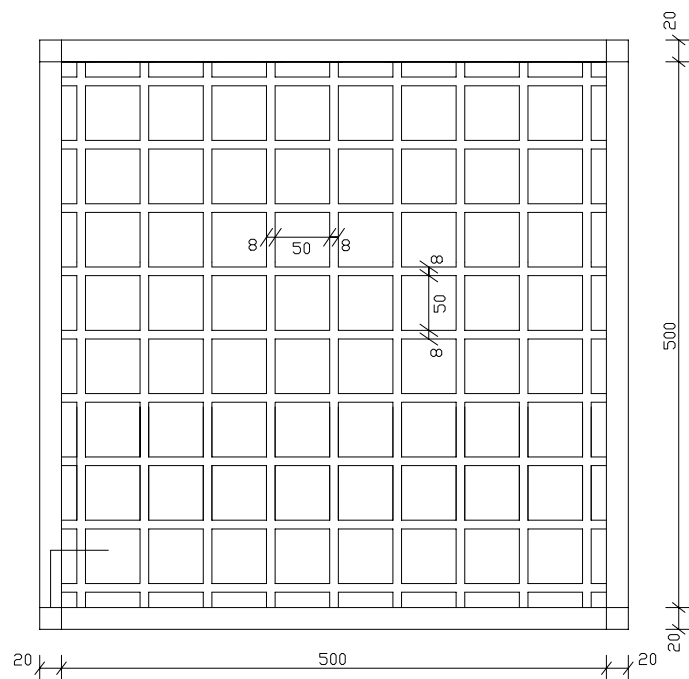


Figura 6.3- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 50 cm

O concreto utilizado será o mesmo do exemplo 1, portanto o módulo de elasticidade longitudinal (E_{cs}) e o módulo de elasticidade transversal (G) também permanecem os mesmos .

Como já foi dito que o objetivo é estudar apenas a influência do espaçamento entre as nervuras, é necessário fixar para todos os exemplos

uma mesma espessura de mesa. Como na prática, para uma laje com essas dimensões, o espaçamento entre nervuras de 30 cm é o mais usual, é interessante fixar a espessura da mesa para este espaçamento, que no caso é de 4 cm. A carga utilizada também deverá ser a carga atuante na laje com espaçamento entre nervuras de 30 cm.

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.4:

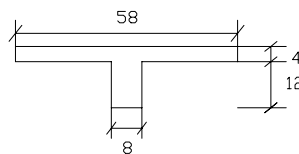


Figura 6.4 – Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 2

Da geometria da seção determinam-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 4,34 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 5807,09 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2385,57 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade, é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10., obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 10,63 \text{ cm}$

Calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1987) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtém-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 4,27 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 5871,46 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2995,79 \text{ cm}^4$

EXEMPLO 3- Mesma laje do exemplo anterior, porém neste caso será adotada distância livre entre nervuras de 80 cm, conforme a Figura 6.5 :

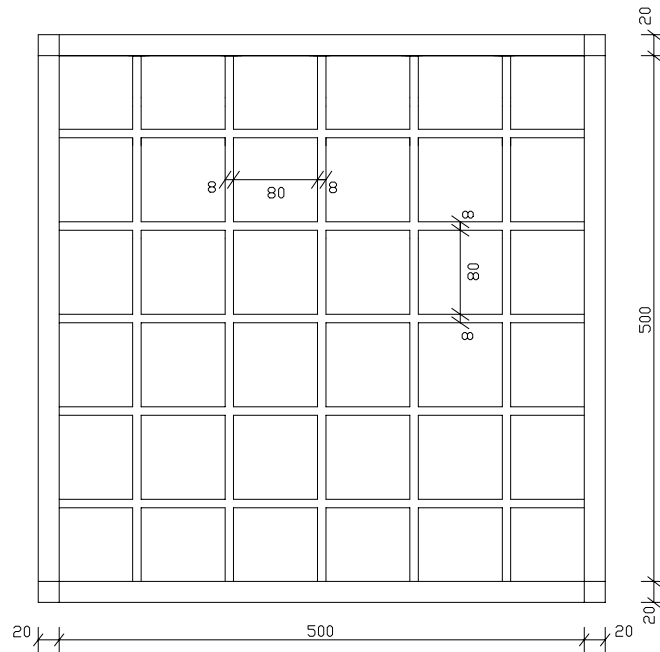


Figura 6.5- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 80 cm

O concreto utilizado será o mesmo dos exemplos anteriores, portanto o módulo de elasticidade longitudinal (E_{cs}) e o módulo de elasticidade transversal (G) também permanecem os mesmos.

A espessura da mesa, largura da nervura e o carregamento também serão os mesmos.

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.6:

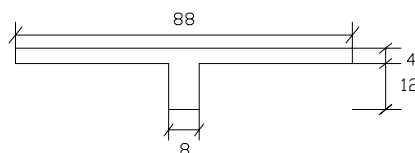


Figura 6.6- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 3

Da geometria da seção determinam-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 3,71 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 6448,77 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 3025,57 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10., obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 9,58 \text{ cm}$

Calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1987) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtém-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 3,66 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 6510,05 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 3315,79 \text{ cm}^4$

EXEMPLO 4- Mesma laje do exemplo anterior, porém neste caso será adotada distância livre entre nervuras de 100 cm, conforme a Figura abaixo:

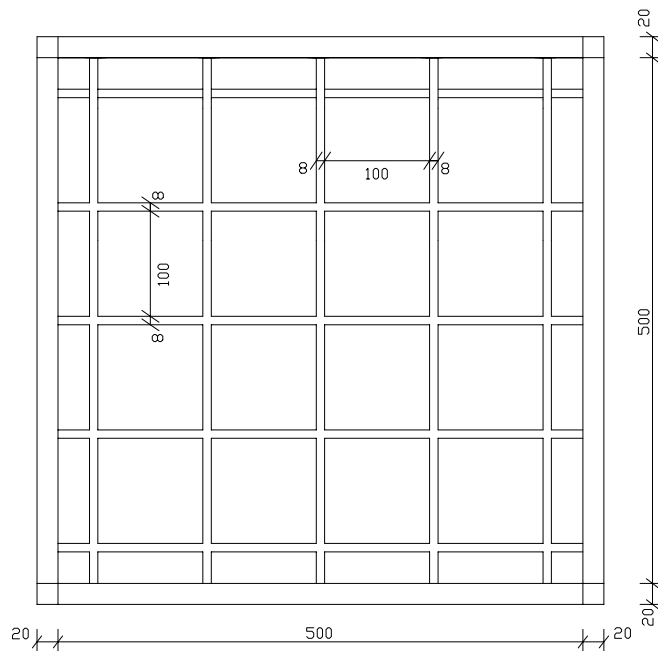


Figura 6.7- Laje nervurada com distância livre entre nervuras igual a 100 cm

O concreto utilizado será o mesmo dos exemplos anteriores, portanto o módulo de elasticidade longitudinal (E_{cs}) e o módulo de elasticidade transversal (G) também permanecem os mesmos.

A espessura da mesa, largura da nervura e o carregamento também serão os mesmos.

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.8:

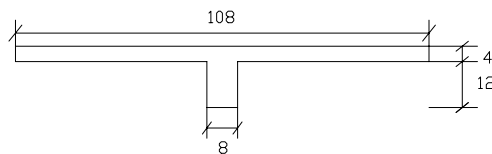


Figura 6.8- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 4

Da geometria da seção determinam-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 3,45 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 6754,92 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 3452,24 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10., obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 9,09 \text{ cm}$

Calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1987) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtém-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 3,41 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 6815,74 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 3529,12 \text{ cm}^4$

6.1.1.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4

Para avaliar o comportamento das lajes nervuradas pelo modelo de analogia de grelha foram analisados alguns parâmetros importantes, como o I e o J , além das condições da apoio das lajes.

Análise 1-A1(J)

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais (as restrições nodais dos apoios são: deslocamento vertical restringido, assim como a rotação ao redor do eixo perpendicular ao apoio, porém com a rotação ao redor do eixo do apoio liberado).
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção da seção transversal integral (I e J calculados através das equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 2 – A2(1% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 1% do valor calculado (I e J calculados através das equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 3– A3(15% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 15% do valor calculado. (conforme recomendação da Norma NBR-6118/2001, item 14.6.7.2). (I e J calculados através das equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 4– A4($J_{K\&B}$):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção integral calculado segundo KENNEDY & BALI pela equação 2.51 (I calculado pela equação 5.13).

Análise 5– A5((I e J) $_{K\&B}$):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.

- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI através das equações 5.14 e 2.51, respectivamente.

Análise 6 – A6((I e 1% J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI, através das equações 5.14 e 2.51, respectivamente, porém com o momento de inércia à torção correspondente a 1% do valor obtido pela equação 2.51.

Análise 7- A7(20X50, J):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à torção da seção transversal integral (I e J calculados através das equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 8- A8(20X50, 1% J):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 1% do valor calculado (I e J calculados através das equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 9- A9(20X50, J _{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção calculado segundo KENNEDY & BALI através da equação 2.51 (I calculado pela equação 5.13).

Análise 10- A10(20X50, (I e J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI através das equações 5.14 e 2.51, respectivamente.

Análise 11- A11(20X50, (I e 1% J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI, através das equações 5.14 e 2.51, respectivamente, porém com o momento de inércia à torção correspondente a 1% do valor obtido pela equação 2.51.

Análise 12 – A12(TE-CZERNY)

- Análise da laje nervurada como placa, através da Teoria da Elasticidade, utilizando as Tabelas de Czerny com altura equivalente.

Essas mesmas análises foram feitas considerando engastamento nos lados das lajes. Foram analisadas as lajes com 1, 2, 3 e 4 lados engastados, conforme será visto adiante.

6.1.1.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA AS ANÁLISES REALIZADAS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4

Os resultados dos momentos fornecidos pelo programa são dados por nervura (M_x , M_y , M_{ex} , M_{ey} e M_{xy} em kN.m) , mas foram apresentados também os momentos por metro (m_x , m_y , m_{ex} , m_{ey} e m_{xy} em kN.m/m), para que se possa comparar os valores entre as lajes com espaçamento entre nervuras diferentes. Para que se obtenha os valores dos momentos por metro, deve-se dividir os valores dos momentos por nervura, pela distância entre os eixos das nervuras.

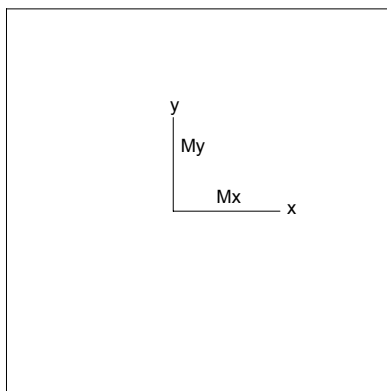
Lajes com os 4 lados apoiados (Caso 1)

Figura 6.9 – Momentos fletores atuantes na laje apoiada em quatro lados

Tabela 6.1 – Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando os 4 lados apoiados

Exemplo 1	$M_x = M_y$ KN.m	$m_x = m_y$ KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	3,54	9,32	0,61	1,61	0,94
A2(1% J)	4,06	10,68	0,01	0,02	1,07
A3(15% J)	3,98	10,47	0,10	0,26	1,05
A4(J_{K&B})	3,35	8,82	0,83	2,18	0,89
A5((I e J)_{K&B})	3,36	8,84	0,82	2,16	0,89
A6((I e 1% J)_{K&B})	4,06	10,68	0,01	0,03	1,06
A7(20x50, J)	3,44	9,05	0,47	1,24	1,09
A8(20x50, 1% J)	3,84	10,11	0,005	0,01	1,18
A9(20x50, J_{K&B})	3,30	8,68	0,64	1,68	1,06
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	3,31	8,71	0,63	1,66	1,05
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	3,84	10,11	0,007	0,02	1,17
A12(TE-CZERNY)	2,32	6,11	3,05	8,02	0,51

Tabela 6.2 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando os 4 lados apoiados

Exemplo <u>2</u>	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	5,25	9,05	0,97	1,67	1,23
A2(1% J)	6,15	10,60	0,01	0,02	1,43
A3(15% J)	6,00	10,34	0,16	0,28	1,40
A4(J_{K&B})	5,06	8,72	1,18	2,03	1,18
A5((I e J)_{K&B})	5,07	8,74	1,16	2,00	1,17
A6((I e 1% J)_{K&B})	6,14	10,59	0,01	0,02	1,41
A7(20x50, J)	5,12	8,83	0,79	1,36	1,37
A8(20x50, 1% J)	5,84	10,07	0,009	0,02	1,52
A9(20x50, J_{K&B})	4,96	8,55	0,95	1,64	1,33
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	4,97	8,57	0,94	1,62	1,32
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	5,84	10,07	0,01	0,02	1,50
A12(TE-CZERNY)	3,54	6,11	4,65	8,02	0,69

Tabela 6.3 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando os 4 lados apoiados

Exemplo <u>3</u>	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	8,12	9,23	1,39	1,58	1,71
A2(1% J)	9,25	10,51	0,02	0,02	1,93
A3(15% J)	9,07	10,31	0,23	0,26	1,90
A4(J_{K&B})	8,02	9,11	1,51	1,72	1,70
A5((I e J)_{K&B})	8,03	9,13	1,50	1,70	1,68
A6((I e 1% J)_{K&B})	9,25	10,51	0,02	0,02	1,92
A7(20x50, J)	7,85	8,92	1,18	1,34	1,83
A8(20x50, 1% J)	8,80	10,00	0,01	0,01	2,00
A9(20x50, J_{K&B})	7,77	8,83	1,28	1,45	1,82
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	7,78	8,84	1,27	1,44	1,80
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	8,80	10,00	0,01	0,01	1,99
A12(TE-CZERNY)	5,38	6,11	7,06	8,02	0,94

Tabela 6.4 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando os 4 lados apoiados

Exemplo <u>4</u>	$M_x = M_y$ KN.m	$m_x = m_y$ KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	9,27	8,58	2,00	1,85	1,85
A2(1% J)	11,22	10,39	0,02	0,02	2,24
A3(15% J)	10,89	10,08	0,35	0,32	2,17
A4($J_{K\&B}$)	9,24	8,56	2,04	1,89	1,84
A5(($I e J$)$_{K\&B}$)	9,25	8,56	2,02	1,87	1,82
A6(($I e 1\% J$)$_{K\&B}$)	11,22	10,39	0,02	0,02	2,22
A7(20x50, J)	9,00	8,33	1,71	1,58	1,96
A8(20x50, 1% J)	10,62	9,83	0,02	0,02	2,27
A9(20x50, $J_{K\&B}$)	8,97	8,31	1,74	1,61	1,96
A10(20x50, ($I e J$)$_{K\&B}$)	8,98	8,31	1,72	1,59	1,94
A11(20x50, ($I e 1\% J$)$_{K\&B}$)	10,63	9,84	0,02	0,02	2,25
A12(TE-CZERNY)	6,60	6,11	8,66	8,02	1,10

Lajes com 1 lado engastado (Caso 2)

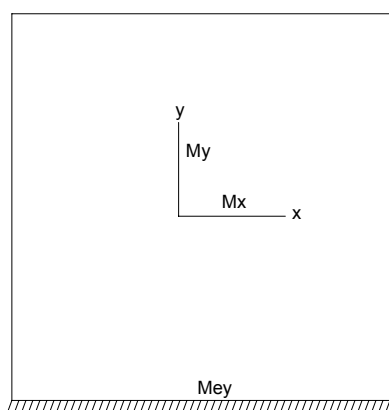


Figura 6.10 –Momentos fletores atuantes na laje com 1 lado engastado

Tabela 6.5 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 1 lado engastado

Exemplo 1	Mx KN.m	mx KN.m/m	My KN.m	my KN.m/m	Mey KN.m	mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	2,08	5,47	2,95	7,76	-5,67	-14,92	0,45	1,18	0,57
A2(1% J)	2,30	6,05	3,26	8,58	-5,98	-15,74	0,01	0,02	0,63
A3(15% J)	2,27	5,97	3,21	8,45	-5,93	-15,61	0,07	0,18	0,62
A4(J_{K&B})	2,00	5,26	2,84	7,47	-5,55	-14,61	0,61	1,61	0,55
A5((I e J)_{K&B})	2,00	5,26	2,84	7,47	-5,55	-14,61	0,61	1,61	0,55
A6((I e 1% J)_{K&B})	2,30	6,05	3,26	8,58	-5,98	-15,74	0,01	0,02	0,62
A7(20x50, J)	2,46	6,47	2,65	6,97	-4,81	-12,66	0,37	0,97	0,73
A8(20x50, 1% J)	2,64	6,95	2,90	7,63	-5,06	-13,32	0,01	0,02	0,77
A9(20x50, J_{K&B})	2,40	6,32	2,56	6,74	-4,72	-12,42	0,51	1,34	0,71
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	2,41	6,34	2,56	6,74	-4,71	-12,39	0,50	1,32	0,70
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	2,64	6,95	2,90	7,63	-5,05	-13,29	0,006	0,02	0,76
A12(TE-CZERNY)	1,63	4,28	1,99	5,23	-4,43	-11,66	2,24	5,90	0,35

Tabela 6.6 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 1 lado engastado

Exemplo 2	Mx KN.m	mx KN.m/m	My KN.m	my KN.m/m	Mey KN.m	mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	3,10	5,34	4,45	7,67	-8,48	-14,62	0,72	1,24	0,75
A2(1% J)	3,46	5,97	4,96	8,55	-9,05	-15,60	0,01	0,02	0,82
A3(15% J)	3,41	5,88	4,88	8,41	-8,96	-15,45	0,12	0,21	0,82
A4(J_{K&B})	3,02	5,21	4,30	7,41	-8,35	-14,40	0,87	1,50	0,73
A5((I e J)_{K&B})	3,02	5,21	4,31	7,43	-8,36	-14,41	0,87	1,50	0,72
A6((I e 1% J)_{K&B})	3,46	5,97	4,96	8,55	-9,05	-15,60	0,01	0,02	0,83
A7(20x50, J)	3,51	6,05	4,06	7,00	-7,47	-12,88	0,62	1,07	0,89
A8(20x50, 1% J)	3,82	6,59	4,51	7,78	-7,94	-13,69	0,01	0,01	0,96
A9(20x50, J_{K&B})	3,45	5,95	3,97	6,84	-7,36	-12,69	0,75	1,29	0,88
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	3,45	5,95	3,97	6,84	-7,36	-12,69	0,74	1,28	0,87
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	3,83	6,60	4,51	7,78	-7,93	-13,67	0,01	0,02	0,94
A12(TE-CZERNY)	2,48	4,28	3,03	5,23	-6,76	-11,66	3,42	5,90	0,47

Tabela 6.7 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 1 lado engastado

Exemplo 3	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KN.m	m_y KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	4,58	5,20	6,84	7,77	-12,94	-14,70	0,98	1,11	1,01
A2(1% J)	5,07	5,76	7,45	8,47	-13,61	-15,47	0,01	0,01	1,09
A3(15% J)	4,99	5,67	7,35	8,35	-13,51	-15,35	0,16	0,18	1,09
A4(J_{K&B})	4,54	5,16	6,79	7,72	-12,88	-14,64	1,03	1,17	1,00
A5((I e J)_{K&B})	4,55	5,17	6,79	7,72	-12,89	-14,65	1,02	1,16	0,99
A6((I e 1% J)_{K&B})	5,07	5,76	7,45	8,47	-13,61	-15,47	0,01	0,01	1,10
A7(20x50, J)	5,12	5,82	6,34	7,20	-11,71	-13,31	0,88	1,00	1,16
A8(20x50, 1% J)	5,54	6,30	6,87	7,81	-12,29	-13,97	0,01	0,01	1,24
A9(20x50, J_{K&B})	5,08	5,77	6,30	7,16	-11,66	-13,25	0,93	1,06	1,16
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	5,09	5,78	6,30	7,16	-11,65	-13,24	0,92	1,05	1,15
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	5,55	6,31	6,87	7,81	-12,28	-13,95	0,01	0,01	1,23
A12(TE-CZERNY)	3,77	4,28	4,60	5,23	-10,26	-11,66	5,19	5,90	0,64

Tabela 6.8 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 1 lado engastado

Exemplo 4	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KN.m	m_y KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	5,40	5,00	7,79	7,21	-15,13	-14,01	1,48	1,37	1,12
A2(1% J)	6,14	5,69	8,96	8,30	-16,47	-15,25	0,02	0,02	1,26
A3(15% J)	6,02	5,57	8,75	8,10	-16,26	-15,06	0,25	0,23	1,25
A4(J_{K&B})	5,38	4,98	7,77	7,19	-15,10	-13,98	1,50	1,39	1,11
A5((I e J)_{K&B})	5,39	4,99	7,78	7,20	-15,11	-13,99	1,50	1,39	1,11
A6((I e 1% J)_{K&B})	6,14	5,69	8,96	8,30	-16,47	-15,25	0,02	0,02	1,27
A7(20x50, J)	5,94	5,50	7,24	6,70	-13,81	-12,79	1,32	1,22	1,27
A8(20x50, 1% J)	6,59	6,10	8,30	7,69	-14,97	-13,86	0,02	0,02	1,40
A9(20x50, J_{K&B})	5,93	5,49	7,22	6,69	-13,78	-12,76	1,34	1,24	1,27
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	5,94	5,50	7,23	6,69	-13,79	-12,77	1,33	1,23	1,26
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	6,60	6,11	8,30	7,69	-14,96	-13,85	0,02	0,02	1,39
A12(TE-CZERNY)	4,62	4,28	5,65	5,23	-12,59	-11,66	6,37	5,90	0,75

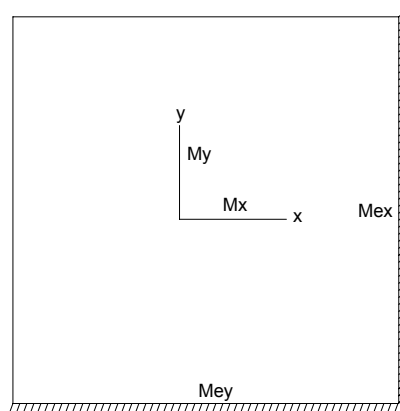
Lajes com 2 lados engastados (Caso 3)

Figura 6.11–Momentos fletores atuantes na laje com 2 lados engastados

Tabela 6.9 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 2 lados engastados

Exemplo 1	$M_x = M_y$ KN.m	$m_x = m_y$ KN.m/m	$M_{ex} = M_{ey}$ KN.m	$m_{ex} = m_{ey}$ KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	2,09	5,50	-4,35	-11,45	0,38	1,00	0,42
A2(1% J)	2,28	6,00	-4,50	-11,84	0,01	0,02	0,45
A3(15% J)	2,25	5,92	-4,48	-11,79	0,06	0,16	0,44
A4($J_{K\&B}$)	2,02	5,32	-4,29	-11,29	0,52	1,37	0,39
A5(($I e J$)$_{K\&B}$)	2,02	5,32	-4,29	-11,29	0,51	1,34	0,39
A6(($I e 1\% J$)$_{K\&B}$)	2,28	6,00	-4,50	-11,84	0,01	0,02	0,43
A7(20x50, J)	2,04	5,37	-4,01	-10,55	0,32	0,84	0,47
A8(20x50, 1% J)	2,20	5,79	-4,14	-10,89	0,01	0,01	0,49
A9(20x50, $J_{K\&B}$)	1,99	5,24	-3,96	-10,42	0,43	1,13	0,46
A10(20x50, ($I e J$)$_{K\&B}$)	1,99	5,24	-3,96	-10,42	0,43	1,13	0,45
A11(20x50, ($I e 1\% J$)$_{K\&B}$)	2,19	5,76	-4,13	-10,87	0,01	0,01	0,49
A12(TE-CZERNY)	1,53	4,02	-3,69	-9,70	—	—	0,26

Tabela 6.10 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 2 lados engastados

Exemplo 2	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	3,10	5,34	-6,49	-11,19	0,61	1,05	0,54
A2(1% J)	3,43	5,91	-6,77	-11,67	0,01	0,01	0,59
A3(15% J)	3,38	5,83	-6,73	-11,60	0,10	0,17	0,58
A4(J_{K&B})	3,03	5,22	-6,42	-11,07	0,74	1,28	0,52
A5((I_eJ)_{K&B})	3,03	5,22	-6,42	-11,07	0,74	1,28	0,51
A6((I_e1% J)_{K&B})	3,42	5,90	-6,77	-11,67	0,01	0,01	0,57
A7(20x50, J)	3,04	5,24	-6,08	-10,48	0,52	0,90	0,60
A8(20x50,1% J)	3,31	5,71	-6,32	-10,90	0,01	0,01	0,64
A9(20x50, J_{K&B})	2,98	5,14	-6,02	-10,38	0,64	1,10	0,58
A10(20x50,(I_eJ)_{K&B})	2,98	5,14	-6,02	-10,38	0,63	1,09	0,58
A11(20x50,(I_e1% J)_{K&B})	3,31	5,71	-6,32	-10,90	0,01	0,01	0,62
A12(TE-CZERNY)	2,33	4,02	-5,63	-9,70	—	—	0,35

Tabela 6.11 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 2 lados engastados

Exemplo 3	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	4,66	5,30	-9,61	-10,92	0,78	0,89	0,71
A2(1% J)	5,03	5,72	-9,94	-11,30	0,01	0,01	0,76
A3(15% J)	4,96	5,64	-9,89	-11,24	0,13	0,15	0,75
A4(J_{K&B})	4,63	5,26	-9,58	-10,89	0,85	0,97	0,70
A5((I_eJ)_{K&B})	4,63	5,26	-9,59	-10,90	0,85	0,97	0,70
A6((I_e1% J)_{K&B})	5,03	5,72	-9,94	-11,30	0,01	0,01	0,75
A7(20x50, J)	4,60	5,23	-9,22	-10,48	0,71	0,81	0,77
A8(20x50,1% J)	4,93	5,60	-9,51	-10,81	0,01	0,01	0,82
A9(20x50, J_{K&B})	4,57	5,19	-9,20	-10,45	0,77	0,88	0,77
A10(20x50,(I_eJ)_{K&B})	4,57	5,19	-9,20	-10,45	0,76	0,86	0,76
A11(20x50,(I_e1% J)_{K&B})	4,93	5,60	-9,51	-10,81	0,01	0,01	0,81
A12(TE-CZERNY)	3,54	4,02	-8,54	-9,70	—	—	0,48

Tabela 6.12 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 2 lados engastados

Exemplo 4	M_x=M_y KN.m	m_x=m_y KN.m/m	M_{ex}=M_{ey} KN.m	m_{ex}=m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	5,42	5,02	-11,38	-10,54	1,25	1,16	0,80
A2(1% J)	6,11	5,66	-12,03	-11,14	0,01	0,01	0,88
A3(15% J)	5,99	5,55	-11,93	-11,05	0,21	0,19	0,87
A4(J_{K&B})	5,42	5,02	-11,36	-10,52	1,27	1,18	0,79
A5((I_eJ)_{K&B})	5,42	5,02	-11,37	-10,53	1,26	1,17	0,79
A6((I_e1% J)_{K&B})	6,11	5,66	-12,03	-11,14	0,01	0,01	0,87
A7(20x50, J)	5,33	4,94	-10,94	-10,13	1,12	1,04	0,86
A8(20x50, 1% J)	5,97	5,53	-11,52	-10,67	0,01	0,01	0,93
A9(20x50, J_{K&B})	5,32	4,93	-10,92	-10,11	1,14	1,06	0,86
A10(20x50, (I_eJ)_{K&B})	5,33	4,94	-10,93	-10,12	1,13	1,05	0,85
A11(20x50, (I_e1% J)_{K&B})	5,97	5,53	-11,51	-10,66	0,01	0,01	0,92
A12(TE-CZERNY)	4,34	4,02	-10,48	-9,70	—	—	0,57

Lajes com 3 lados engastados (Caso 4)

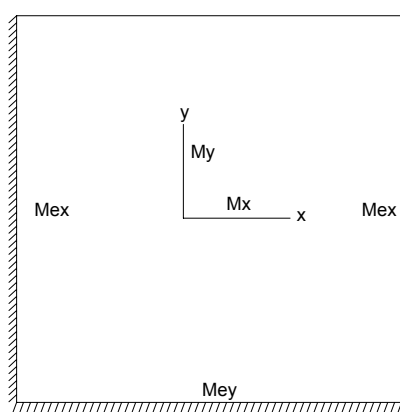


Figura 6.12 –Momentos fletores atuantes na laje com 3 lados engastados

Tabela 6.13 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando 3 lados engastados

Exemplo <u>1</u>	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KNm	m_y KN.m/m	M_{ex} KN.m	m_{ex} KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KNm	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	1,73	4,55	1,34	3,53	-3,74	-9,84	-3,15	-8,29	0,20	0,53	0,28
A2(1% J)	1,86	4,89	1,43	3,76	-3,85	-10,13	-3,19	-8,39	0,01	0,01	0,29
A3(15% J)	1,84	4,84	1,41	3,71	-3,84	-10,11	-3,19	-8,39	0,03	0,08	0,29
A4(J_{K&B})	1,68	4,42	1,30	3,42	-3,70	-9,74	-3,13	-8,24	0,28	0,74	0,27
A5((I e J)_{K&B})	1,68	4,42	1,30	3,42	-3,70	-9,74	-3,13	-8,24	0,26	0,68	0,27
A6((I e 1% J)_{K&B})	1,86	4,89	1,43	3,76	-3,85	-10,13	-3,19	-8,39	0,01	0,01	0,29
A7(20x50, J)	1,56	4,11	1,51	3,97	-3,33	-8,76	-3,21	-8,45	0,16	0,42	0,33
A8(20x50, 1% J)	1,66	4,37	1,58	4,16	-3,42	-9,00	-3,25	-8,55	0,01	0,01	0,35
A9(20x50, J_{K&B})	1,52	4,00	1,48	3,89	-3,29	-8,66	-3,19	-8,39	0,23	0,61	0,33
A10(20x50, (I e J_{K&B}))	1,52	4,00	1,48	3,89	-3,29	-8,66	-3,20	-8,42	0,22	0,58	0,33
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	1,66	4,37	1,58	4,16	-3,42	-9,00	-3,25	-8,55	0,01	0,01	0,34
A12(TE-CZERNY)	1,38	3,64	1,18	3,11	-3,25	-8,56	-2,88	-7,58	—	—	0,20

Tabela 6.14 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando 3 lados engastados

Exemplo <u>2</u>	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KNm	m_y KN.m/m	M_{ex} KN.m	m_{ex} KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KNm	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	2,60	4,48	2,02	3,48	-5,59	-9,64	-4,75	-8,19	0,32	0,55	0,37
A2(1% J)	2,81	4,84	2,18	3,76	-5,79	-9,98	-4,83	-8,33	0,01	0,01	0,39
A3(15% J)	2,77	4,78	2,15	3,71	-5,76	-9,93	-4,82	-8,31	0,05	0,09	0,38
A4(J_{K&B})	2,55	4,40	1,98	3,41	-5,54	-9,55	-4,73	-8,16	0,40	0,69	0,36
A5((I e J)_{K&B})	2,55	4,40	1,98	3,41	-5,55	-9,57	-4,73	-8,16	0,40	0,69	0,36
A6((I e 1% J)_{K&B})	2,81	4,84	2,18	3,76	-5,79	-9,98	-4,83	-8,33	0,01	0,01	0,38
A7(20x50, J)	2,40	4,14	2,22	3,83	-5,11	-8,81	-4,83	-8,33	0,27	0,47	0,42
A8(20x50, 1% J)	2,57	4,43	2,35	4,05	-5,29	-9,12	-4,90	-8,45	0,01	0,01	0,44

A9 (20x50, $J_{K\&B}$)	2,35	4,05	2,19	3,78	-5,07	-8,74	-4,81	-8,29	0,34	0,59	0,42
A10 (20x50, ($I e J_{K\&B}$)	2,36	4,07	2,19	3,78	-5,07	-8,74	-4,81	-8,29	0,34	0,59	0,41
A11 (20x50, ($I e 1\% J_{K\&B}$)	2,57	4,43	2,35	4,05	-5,28	-9,10	-4,90	-8,45	0,01	0,01	0,44
A12 (TE-CZERNY)	2,11	3,64	1,80	3,11	-4,96	-8,56	-4,40	-7,58	—	—	0,27

Tabela 6.15 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando 3 lados engastados

Exemplo 3	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KN.m	m_y KN.m/m	M_{ex} KN.m	m_{ex} KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KN.m	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1 (J)	3,90	4,43	3,06	3,48	-8,29	-9,42	-7,17	-8,15	0,52	0,59	0,49
A2 (1% J)	4,18	4,75	3,29	3,74	-8,54	-9,70	-7,27	-8,26	0,01	0,01	0,52
A3 (15% J)	4,14	4,70	3,25	3,69	-8,50	-9,66	-7,26	-8,25	0,08	0,09	0,51
A4 ($J_{K\&B}$)	3,87	4,40	3,05	3,47	-8,26	-9,39	-7,16	-8,14	0,56	0,64	0,48
A5 (($I e J_{K\&B}$)	3,87	4,40	3,05	3,47	-8,27	-9,40	-7,16	-8,14	0,56	0,64	0,48
A6 (($I e 1\% J_{K\&B}$)	4,18	4,75	3,29	3,74	-8,54	-9,70	-7,27	-8,26	0,01	0,01	0,51
A7 (20x50, J)	3,68	4,18	3,29	3,74	-7,79	-8,85	-7,28	-8,27	0,46	0,52	0,55
A8 (20x50, 1% J)	3,93	4,47	3,49	3,97	-8,02	-9,11	-7,38	-8,39	0,01	0,01	0,57
A9 (20x50, $J_{K\&B}$)	3,66	4,16	3,28	3,73	-7,77	-8,83	-7,27	-8,26	0,50	0,57	0,55
A10 (20x50, ($I e J_{K\&B}$)	3,66	4,16	3,28	3,73	-7,77	-8,83	-7,27	-8,26	0,49	0,56	0,54
A11 (20x50, ($I e 1\% J_{K\&B}$)	3,93	4,47	3,50	3,98	-8,01	-9,10	-7,38	-8,39	0,01	0,01	0,57
A12 (TE-CZERNY)	3,20	3,64	2,74	3,11	-7,53	-8,56	-6,67	-7,58	—	—	0,36

Tabela 6.16 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando 3 lados engastados

Exemplo 4	M_x KN.m	m_x KN.m/m	M_y KNm	m_y KN.m/m	M_{ex} KN.m	m_{ex} KN.m/m	M_{ey} KN.m	m_{ey} KN.m/m	M_{xy} KNm	m_{xy} KN.m/m	flecha cm
A1(J)	4,72	4,37	3,67	3,40	-9,88	-9,15	-8,58	-7,94	0,63	0,58	0,56
A2(1% J)	5,11	4,73	4,05	3,75	-10,32	-9,56	-8,80	-8,15	0,01	0,01	0,60
A3(15% J)	5,05	4,68	3,99	3,69	-10,26	-9,50	-8,77	-8,12	0,10	0,09	0,59
A4($J_{K\&B}$)	4,71	4,36	3,67	3,40	-9,87	-9,14	-8,58	-7,94	0,65	0,60	0,55
A5($(I e J)_{K\&B}$)	4,72	4,37	3,67	3,40	-9,87	-9,14	-8,58	-7,94	0,64	0,59	0,55
A6($(I e 1\% J)_{K\&B}$)	5,11	4,73	4,05	3,75	-10,32	-9,56	-8,80	-8,15	0,01	0,01	0,59
A7(20x50, J)	4,49	4,16	3,90	3,61	-9,33	-8,64	-8,67	-8,03	0,57	0,53	0,61
A8(20x50, 1% J)	4,84	4,48	4,24	3,93	-9,74	-9,02	-8,88	-8,22	0,01	0,01	0,65
A9(20x50, $J_{K\&B}$)	4,48	4,15	3,89	3,60	-9,33	-8,64	-8,67	-8,03	0,58	0,54	0,61
A10(20x50, ($I e J_{K\&B}$))	4,48	4,15	3,90	3,61	-9,33	-8,64	-8,67	-8,03	0,58	0,54	0,61
A11(20x50, ($I e 1\% J_{K\&B}$))	4,84	4,48	4,25	3,94	-9,73	-9,01	-8,88	-8,22	0,01	0,01	0,64
A12(TE-CZERNY)	3,93	3,64	3,36	3,11	-9,24	-8,56	-8,19	-7,58	—	—	0,42

Lajes com 4 lados engastados (Caso 5)

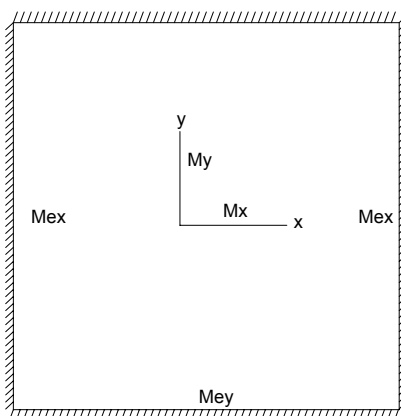


Figura 6.13 –Momentos fletores atuantes na laje com 4 lados engastados

Tabela 6.17 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 1, considerando os 4 lados engastados

Exemplo 1	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	1,26	3,32	-2,96	-7,79	0,12	0,32	0,21
A2(1% J)	1,34	3,53	-3,02	-7,95	0,001	0,003	0,22
A3(15% J)	1,32	3,47	-3,01	-7,92	0,02	0,05	0,22
A4(J_{K&B})	1,22	3,21	-2,94	-7,74	0,17	0,45	0,20
A5((I e J)_{K&B})	1,23	3,24	-2,94	-7,74	0,16	0,42	0,20
A6((I e 1% J)_{K&B})	1,34	3,53	-3,02	-7,95	0,002	0,01	0,22
A7(20x50, J)	1,22	3,21	-2,79	-7,34	0,09	0,24	0,24
A8(20x50, 1% J)	1,28	3,37	-2,83	-7,45	0,001	0,003	0,24
A9(20x50, J_{K&B})	1,20	3,16	-2,77	-7,29	0,13	0,34	0,23
A10(20x50, (I e J)_{K&B})	1,20	3,16	-2,77	-7,29	0,13	0,34	0,23
A11(20x50, (I e 1% J)_{K&B})	1,28	3,37	-2,83	-7,45	0,001	0,003	0,24
A12(TE-CZERNY)	1,11	2,93	-2,72	-7,15	—	—	0,16

Tabela 6.18 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 2, considerando os 4 lados engastados

Exemplo 2	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1(J)	1,91	3,29	-4,47	-7,71	0,19	0,33	0,28
A2(1% J)	2,03	3,50	-4,57	-7,88	0,002	0,003	0,29
A3(15% J)	2,02	3,48	-4,55	-7,84	0,03	0,05	0,29
A4(J_{K&B})	1,88	3,24	-4,45	-7,67	0,23	0,40	0,27
A5((I e J)_{K&B})	1,88	3,24	-4,45	-7,67	0,23	0,40	0,27
A6((I e 1% J)_{K&B})	2,03	3,50	-4,57	-7,88	0,002	0,003	0,30
A7(20x50, J)	1,87	3,22	-4,28	-7,38	0,16	0,28	0,31
A8(20x50, 1% J)	1,98	3,41	-4,36	-7,52	0,002	0,003	0,32
A9(20x50, J_{K&B})	1,85	3,19	-4,25	-7,33	0,20	0,34	0,30

A10 (20x50,(I e J) _{K&B})	1,85	3,19	-4,25	-7,33	0,19	0,33	0,30
A11 (20x50,(I e 1% J) _{K&B})	1,98	3,41	-4,35	-7,50	0,002	0,003	0,31
A12 (TE-CZERNY)	1,70	2,93	-4,15	-7,15	—	—	0,21

Tabela 6.19 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 3, considerando os 4 lados engastados

Exemplo <u>3</u>	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1 (J)	2,89	3,28	-6,75	-7,67	0,30	0,34	0,38
A2 (1% J)	3,09	3,51	-6,88	-7,82	0,003	0,003	0,40
A3 (15% J)	3,06	3,48	-6,86	-7,80	0,05	0,06	0,40
A4 (J _{K&B})	2,88	3,27	-6,74	-7,66	0,33	0,38	0,38
A5 ((I e J) _{K&B})	2,88	3,27	-6,74	-7,66	0,33	0,38	0,37
A6 ((I e 1% J) _{K&B})	3,09	3,51	-6,88	-7,82	0,004	0,00	0,40
A7 (20x50, J)	2,85	3,24	-6,54	-7,43	0,27	0,31	0,41
A8 (20x50, 1% J)	3,02	3,43	-6,66	-7,57	0,003	0,00	0,43
A9 (20x50, J _{K&B})	2,83	3,22	-6,53	-7,42	0,29	0,33	0,41
A10 (20x50,(I e J) _{K&B})	2,84	3,23	-6,53	-7,42	0,29	0,33	0,40
A11 (20x50,(I e 1% J) _{K&B})	3,02	3,43	-6,65	-7,56	0,003	0,00	0,42
A12 (TE-CZERNY)	2,58	2,93	-6,29	-7,15	—	—	0,29

Tabela 6.20 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 4, considerando os 4 lados engastados

Exemplo <u>4</u>	Mx=My KN.m	mx=my KN.m/m	Mex=Mey KN.m	mex=mey KN.m/m	Mxy KN.m	mxy KN.m/m	flecha cm
A1 (J)	3,50	3,24	-8,08	-7,48	0,36	0,33	0,43
A2 (1% J)	3,74	3,46	-8,32	-7,70	0,004	0,004	0,46
A3 (15% J)	3,70	3,43	-8,28	-7,67	0,06	0,06	0,46
A4 (J _{K&B})	3,50	3,24	-8,08	-7,48	0,37	0,34	0,43

A5 (($I e J$) _{K&B})	3,50	3,24	-8,08	-7,48	0,36	0,33	0,43
A6 (($I e 1\% J$) _{K&B})	3,74	3,46	-8,32	-7,70	0,004	0,004	0,46
A7 (20x50, J)	3,46	3,20	-7,84	-7,26	0,32	0,30	0,46
A8 (20x50, 1% J)	3,67	3,40	-8,06	-7,46	0,003	0,003	0,49
A9 (20x50, J _{K&B})	3,45	3,19	-7,84	-7,26	0,33	0,31	0,46
A10 (20x50, ($I e J$) _{K&B})	3,46	3,20	-7,84	-7,26	0,32	0,30	0,46
A11 (20x50, ($I e 1\% J$) _{K&B})	3,67	3,40	-8,06	-7,46	0,004	0,00	0,48
A12 (TE-CZERNY)	3,16	2,93	-7,72	-7,15	—	—	0,34

6.1.1.3 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EXEMPLOS 1 A 4

- Ao contrário do que ocorreu para as lajes maciças, os momentos fletores máximos se localizaram no meio do vão. Isso ocorreu porque, mesmo quando considera-se a rigidez à torção da nervura, essa é bem menor do que a das barras da grelha que representam a laje maciça.
- Comparando os resultados das análises A1(J) e A2(1% J) nota-se que ao se considerar a rigidez à torção das nervuras, há uma diminuição nos valores de momentos fletores e flechas, entretanto irão atuar momentos torsores nessas nervuras, as quais deverão ser armadas para suportar tais esforços. Para o caso 1, por exemplo, essa diminuição é em torno de 17% para os momentos fletores e 16% para as flechas. Pode-se perceber, também, que à medida que o número de lados engastados aumenta essa diferença diminui, sendo que no caso 5 (4 lados engastados) a diminuição para os valores de momentos fletores positivos é de 7%, 2% para os momentos fletores negativos e 5% para as flechas. É interessante observar na Figura 6.14 (essa Figura está representando o caso 1, mas os outros casos apresentam o mesmo

comportamento), como a variação dessas diferenças é irregular para os diferentes espaçamentos de nervuras (exemplo 1, 2, 3 e 4). Ou seja, não se pode dizer, por exemplo, que ao aumentar o espaçamento entre nervuras essa diferença irá aumentar ou diminuir. Essa irregularidade, na verdade, é um problema do processo de analogia de grelha, que já foi observado, no Capítulo 4, para as lajes maciças. Pois para essas lajes foi verificado que à medida que diminuía o espaçamento das barras da grelha, os resultados de esforços e deslocamentos oscilavam, não seguindo um padrão, como pode ser visto nos gráficos do Capítulo 4.

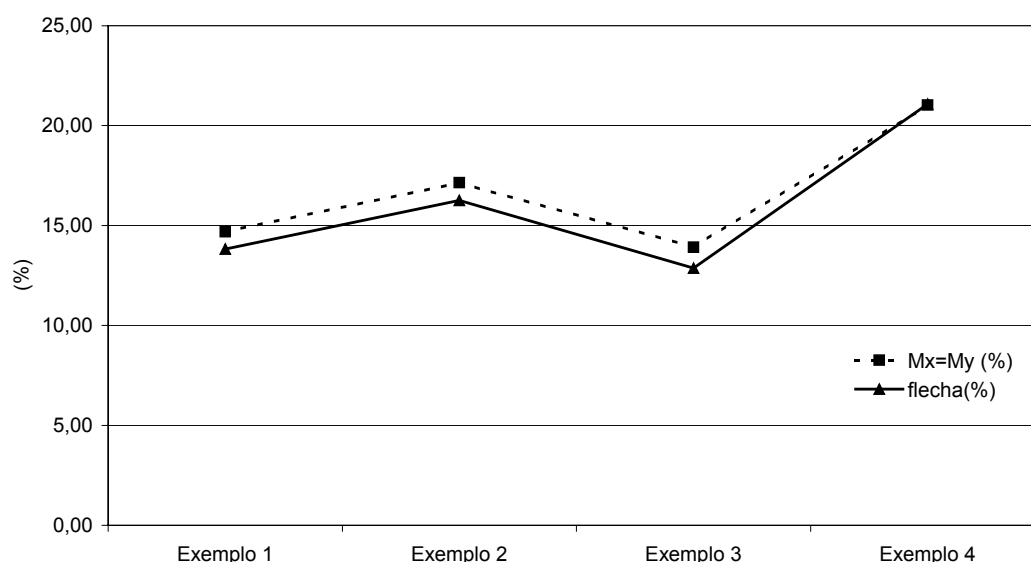


Figura 6.14 – Diferenças percentuais encontradas entre as análises 2 e 1 para os momentos fletores e flechas (caso 1)

- É interessante notar também, que mesmo considerando a rigidez à torção integral da seção da barra da grelha (seção T) (análise 1), os resultados foram, para os momentos fletores no caso 1, em torno de 50% maiores do que os obtidos calculando a laje nervurada através da análise 12 A12(TE-CZERNY), conforme permite a NBR-6118/78, e para as flechas essa diferença relativa foi em média de 78% (Tabela 6.21). Ou seja, é uma diferença grande, contra a segurança, devendo ser

revisado, portanto, esse procedimento permitido pela norma. As diferenças entre as análises $A1(J)$ e $A12(TE-CZERNY)$ para os outros 4 casos podem ser observados nas Tabelas 6.22 a 6.25. Nota-se que à medida que o número de lados engastados aumenta, a diferença entre os resultados dessas 2 análises diminui.

Tabela 6.21 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados

Diferença entre $A1(J)/A12(TE-CZERNY)$	$M_x=M_y$ (%)	flecha (%)
Exemplo 1	52,59	84,31
Exemplo 2	48,31	78,26
Exemplo 3	50,93	81,91
Exemplo 4	40,45	68,18

Tabela 6.22–Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 1 lado engastado

Diferença entre $A1(J)/A12(TE-CZERNY)$	M_x (%)	M_y (%)	M_{ey} (%)	flecha (%)
Exemplo 1	27,61	48,24	27,99	62,86
Exemplo 2	25,00	46,86	25,44	59,57
Exemplo 3	21,49	48,70	26,12	56,25
Exemplo 4	16,88	37,88	20,17	49,33

Tabela 6.23 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 2 lados engastados

Diferença entre A1(J)/A12(TE-CZERNY)	Mx=My (%)	Mex=Mey (%)	flecha (%)
Exemplo 1	36,82	17,89	61,54
Exemplo 2	32,96	15,28	54,29
Exemplo 3	31,73	12,53	47,92
Exemplo 4	24,84	8,59	40,35

Tabela 6.24 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com 3 lados engastados

Diferença entre A1(J)/A12(TE-CZERNY)	Mx (%)	My (%)	Mex (%)	Mey (%)	flecha (%)
Exemplo 1	25,07	13,56	14,98	9,38	40,00
Exemplo 2	23,15	12,22	12,59	7,95	37,04
Exemplo 3	21,75	11,68	10,05	7,50	36,11
Exemplo 4	20,07	9,23	6,87	4,75	33,33

Tabela 6.25 –Diferença entre as análises 1 e análise como placa pela teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas considerando a laje com os 4 lados engastados

Diferença entre A1(J)/A12(TECZERNY)	Mx=My (%)	Mex=Mey (%)	flecha (%)
Exemplo 1	13,17	8,82	31,25
Exemplo 2	12,39	7,71	33,33
Exemplo 3	12,09	7,31	31,03
Exemplo 4	10,61	4,66	26,47

- Já ao se comparar a análise $A2(1\%J)$ com a análise $A12(TE-CZERNY)$, essas diferenças são ainda maiores, chegando, no caso 1, a 75% para os momentos fletores e 110% para as flechas. Entretanto, ao utilizar o coeficiente δ proposto por HANN (1972) para não considerar a rigidez à torção, que para essas condições de apoio tem-se $\delta = 1,71$ (Tabela 5.1), obtém-se os valores mostrados na Tabela 6.26. Para os outros casos de apoio 2, 3, 4 e 5, δ também é obtido através da Tabela 5.1 e os resultados estão apresentados nas Tabelas 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30, respectivamente. Conforme foi comentado anteriormente, esses coeficientes devem ser usados apenas para os momentos fletores positivos, sendo que os momentos fletores negativos devem permanecer com os mesmos valores.

Tabela 6.26 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 1) multiplicados pelo fator $\delta = 1,71$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de $A12(TE-CZERNY) \times \delta$	Diferenças com $A2(1\%J)$
	$M_x = M_y$ (kN.m)	$M_x = M_y$ (%)
Exemplo 1	3,96	-2,46
Exemplo 2	6,05	-1,63
Exemplo 3	9,20	-0,54
Exemplo 4	11,29	0,62

Tabela 6.27– Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 2) multiplicados pelos fatores $\delta_x = 1,32$ e $\delta_y = 1,51$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ_x	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ_y	Diferenças com A2(1% J)	
	Mx (kN.m)	My (kN.m)	Mx(%)	My(%)
Exemplo 1	2,15	3,00	-6,52	-7,98
Exemplo 2	3,27	4,58	-5,49	-7,66
Exemplo 3	4,98	6,95	-1,78	-6,71
Exemplo 4	6,10	8,53	-0,65	-4,80

Tabela 6.28 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 3) multiplicados pelo fator $\delta = 1,30$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ	Diferenças com A2(1% J)
	Mx=My (kN.mN)	Mx=My (%)
Exemplo 1	1,99	-12,72
Exemplo 2	3,03	-11,66
Exemplo 3	4,60	-8,55
Exemplo 4	5,64	-7,69

Tabela 6.29 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 4) multiplicados pelos fatores $\delta_x = 1,23$ e $\delta_y = 1,18$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ_x	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ_y	Diferenças com A2(1% J)	
	Mx (kN.m)	My (kN.m)	Mx (%)	My (%)
Exemplo 1	1,70	1,39	-8,60	-2,80
Exemplo 2	2,60	2,12	-7,47	-2,75
Exemplo 3	3,94	3,23	-5,74	-1,82
Exemplo 4	4,83	3,96	-5,48	-2,22

Tabela 6.30 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade (caso 5) multiplicados pelo fator $\delta = 1,16$ e a diferença percentual desses valores com a análise 2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ	Diferenças com A2(1% J)
	Mx=My (kN.m)	Mx=My (%)
Exemplo 1	1,29	-3,73
Exemplo 2	1,97	-2,96
Exemplo 3	2,99	-3,24
Exemplo 4	3,67	-1,87

- Analisando-se essas Tabelas, percebe-se que ao se introduzir o coeficiente δ (para não considerar a rigidez à torção) na análise A12(TE-CZERNY), a diferença entre esses novos resultados de momentos fletores positivos e os obtidos no modelo de analogia de grelha considerando 1% da rigidez à torção (análise 2), diminuem consideravelmente. Como esse coeficiente só é utilizado para os momentos fletores positivos, os momentos fletores negativos devem permanecer com os mesmos valores. Entretanto as diferenças encontradas entre os valores de momentos fletores negativos calculados

pelo modelo de placas elásticas (A12(TE-CZERNY) e a análise A2(1% J) não são tão pequenas, chegando a 35% para Mey no caso 2. Portanto a introdução do coeficiente δ parece ser mais eficiente para o caso 1, não só por apresentar as menores diferenças com a análise A2(1% J), como pode ser visto na Tabela 6.18, mas por este caso não possuir momentos de engastamento, que são os que apresentam maiores diferenças com a análise A2(1% J).

- Um fato bastante curioso pode ser observado na Figura 6.15, onde mostra a variação das diferenças encontradas entre as flechas obtidas através da análise A2(1% J) e da análise A12(TE-CZERNY) para os 4 exemplos de espaçamento entre nervuras do caso 1 (a Figura 6.15 representa o caso 1, entretanto os outros casos apresentam o mesmo comportamento). Conforme já foi comentado neste trabalho, à medida que diminui-se o espaçamento entre nervuras, esperava-se um comportamento da laje nervurada se aproximando ao das placas elásticas (A12(TE-CZERNY)). Entretanto, conforme mostra a Figura 6.15, o que ocorreu foi exatamente o contrário, ou seja, à medida que diminuiu-se o espaçamento entre nervuras, as diferenças encontradas entre a análise por analogia de grelha (análise 2) e a análise como placas elásticas (A12(TE-CZERNY)) aumentaram. Principalmente devido a essa questão é que se achou conveniente fazer um estudo da analogia de grelha para lajes maciças (capítulo 4), para verificar se pudesse perceber o que ocorria com as diferenças encontradas entre o modelo de analogia de grelha e o modelo de placas pela teoria da elasticidade, com a variação do espaçamento das barras. O que foi observado no Capítulo 4, para diversos casos, foi que os modelos de grelha com barras menos espaçadas apresentaram diferenças maiores em relação ao cálculo como placa pela teoria da elasticidade do que as grelhas com barras mais espaçadas. Apesar dessas diferenças terem sido pequenas, o que se pode concluir, portanto, é que o modelo de analogia de grelha pode apresentar, algumas vezes, um comportamento não muito coerente, como ocorreu neste caso. Este fato foi confirmado ao se utilizar o método dos elementos finitos no cálculo das lajes

nervuradas, conforme será visto mais adiante, pois os resultados obtidos através desse modelo apresentaram os resultados esperados, ou seja, à medida que diminuiu-se o espaçamento entre as nervuras, os resultados se aproximaram dos obtidos através do cálculo como placa elástica.

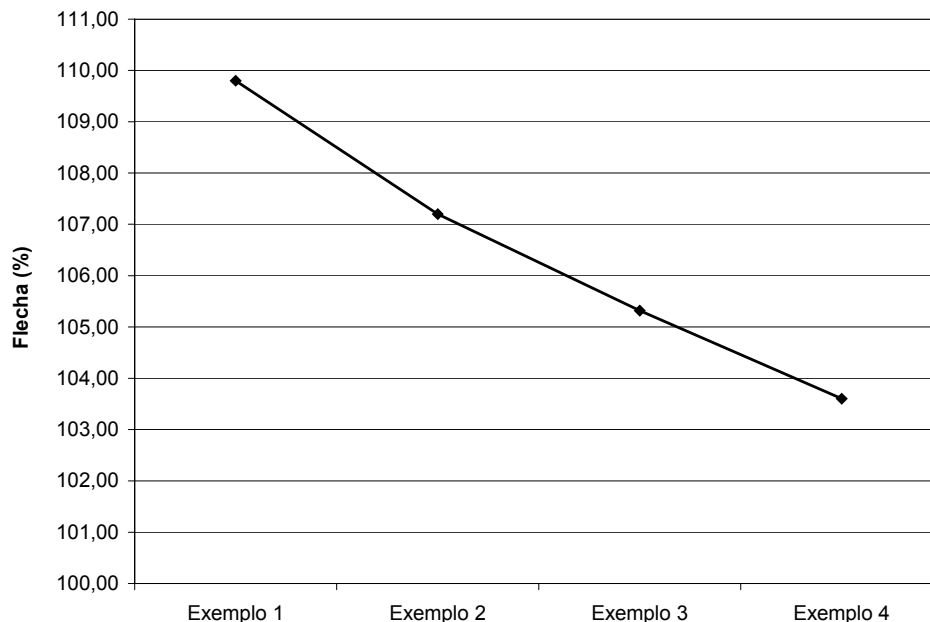


Figura 6.15 – Diferenças percentuais encontradas entre as flechas obtidas através da análise 2 e do modelo de placa calculado pela teoria da elasticidade

- As diferenças encontradas entre os momentos fletores e flechas para as análises A2(1% J) e A3(15% J) foram pequenas (máximo 3%, no caso 1), entretanto as diferenças encontradas para os momentos torsores foram grandes, chegando a 2000% (caso 3). Entretanto esse valor na realidade não é representativo, pois como os momentos torsores obtidos na análise A2(1% J) são próximos de zero, qualquer valor de momento um pouco maior, já resultará numa diferença enorme.
- É interessante observar que a diferença entre os valores de momentos e flechas, quando considera-se a rigidez à torção, J , calculada pela equação 5.16 e quando considera-se J calculado pela equação 2.51 (KENNEDY & BALI) aumenta a medida que é diminuído o espaçamento entre nervuras (Tabela 6.5, 6.25, 6.40, 6.57)

e 6.74). Isto ocorre porque a diferença percentual entre J dado pela eq. 5.16 e J dado pela eq. 2.51 aumenta à medida que o espaçamento entre nervuras diminui. Pois como a equação 2.51 leva em conta, além da continuidade da mesa, a influência que as nervuras ortogonais à seção transversal que está sendo analisada causam na rigidez da mesa dessa seção, ao diminuir-se o espaçamento entre nervuras, está-se aumentando o número das mesmas e, conseqüentemente, causando uma maior influência na rigidez à torção. Entretanto essas diferenças são pequenas, sendo que a máxima para os valores de momentos fletores foi observado no caso 1, não chegando a 6% (Tabela 6.31) e a diferença máxima para os valores de flechas ocorreu no caso 3, não chegando a 8% (Tabela 6.32). Já para os momentos torsores, ao considerar J calculado pela equação 2.51, os valores obtidos chegaram a 42% a mais do que quando utilizou-se J dado pela eq. 5.16.

Tabela 6.31 –Diferença entre as análises 1 e 4 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados (caso 1)

Diferença entre $A1(J)/A4(J_{K\&B})$	$M_x=M_y$ (%)	M_{xy} (%)	flecha (%)
Exemplo 1	5,67	-26,15	5,62
Exemplo 2	3,75	-17,73	4,24
Exemplo 3	1,25	-8,14	0,59
Exemplo 4	0,32	-2,12	0,54

Tabela 6.32 –Diferença entre as análises 1 e 4 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando a laje com 2 lados engastados (caso 3)

Diferença entre $A1(J)/A4(J_{K\&B})$	$M_x=M_y$ (%)	$M_{ex}=M_{ey}$ (%)	M_{xy} (%)	flecha (%)
Exemplo 1	3,47	1,40	-26,92	7,69
Exemplo 2	2,31	1,09	-17,57	3,85
Exemplo 3	0,65	0,31	-8,24	1,43
Exemplo 4	0,00	0,18	-1,57	1,27

- Comparando-se as análises $A4(J_{K\&B})$ e $A5((I \text{ e } J)_{K\&B})$ pode-se perceber que a influência do momento de inércia, I , calculado pela equação 5.13 ou calculado pela equação 5.14 (KENNEDY & BALI, que leva em conta o coeficiente de Poisson na análise da mesa) é praticamente insignificante.
- Ao analisar os resultados das análises $A7(20X50, J)$ e $A8(20X50, 1\% J)$, pode-se perceber que ao se considerar a laje apoiada em viga (20/50), as diferenças encontradas, ao se considerar J integral e 1 % de J , foram um pouco menores do que quando a laje é considerada apoiada em bordos fixos e foram máximas para o caso 1, em torno de 14% para os momentos fletores e 11% para as flechas. Observando a Figura 6.16, nota-se que a variação dessas diferenças para os diversos espaçamentos de nervuras é muito semelhante ao caso em que a laje é considerada apoiada em bordos fixos. Com relação às observações feitas anteriormente para J (eq. 5.16), J (eq. 2.51), I (eq. 5.13) e I (eq. 5.14), para as lajes apoiadas em bordos fixos, valem também para este caso (laje apoiada em vigas), com pequenas modificações nos valores das diferenças encontradas.

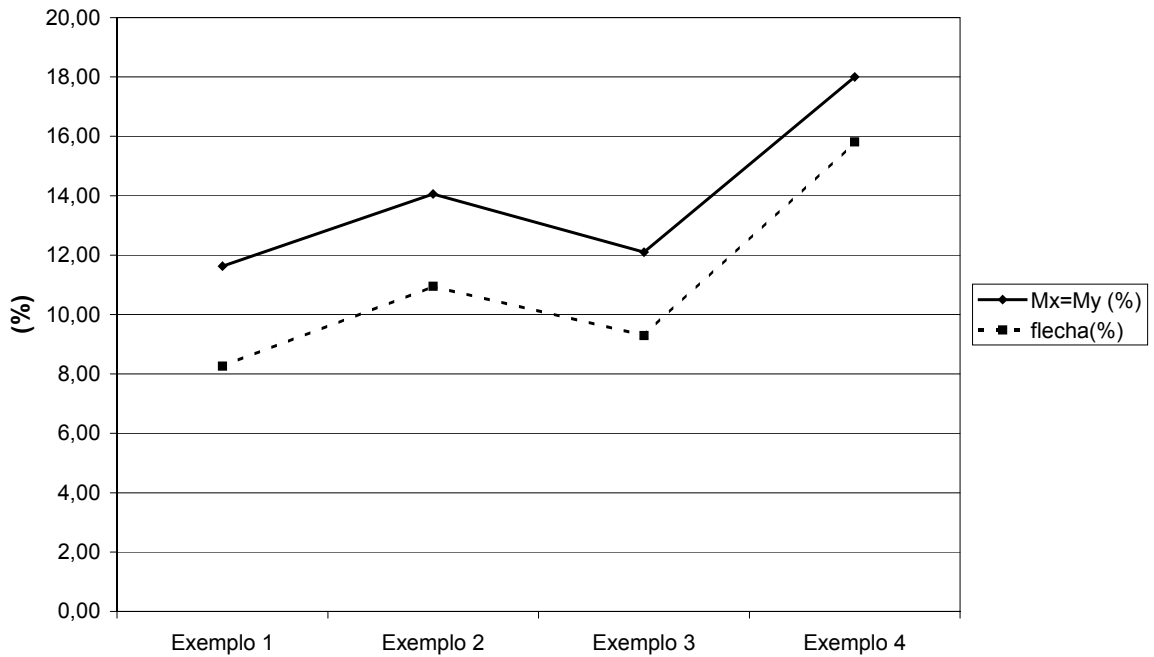


Figura 6.16 – Diferenças percentuais encontradas entre as análises 8 e 7 para os momentos fletores e flechas

- Algo interessante que pode ser observado nas Figuras 6.17 e 6.18 (caso 1) é que ao se considerar a laje apoiada em vigas ao invés de bordos fixos, as flechas aumentaram, como já era de se esperar, entretanto os momentos diminuíram. Este fato também foi verificado para os casos 3 e 5. No caso 2, as flecha e os momentos M_x aumentaram, entretanto os outros momentos diminuíram. Finalmente no caso 4, as flechas também aumentaram, assim como M_y e M_{ey} , entretanto M_x , M_{ex} e M_{xy} diminuíram. Isto provavelmente se deve ao fato da viga absorver uma parte dos momentos que anteriormente eram resistidos apenas pela laje e por uma parte da carga da laje ir diretamente para os pilares.

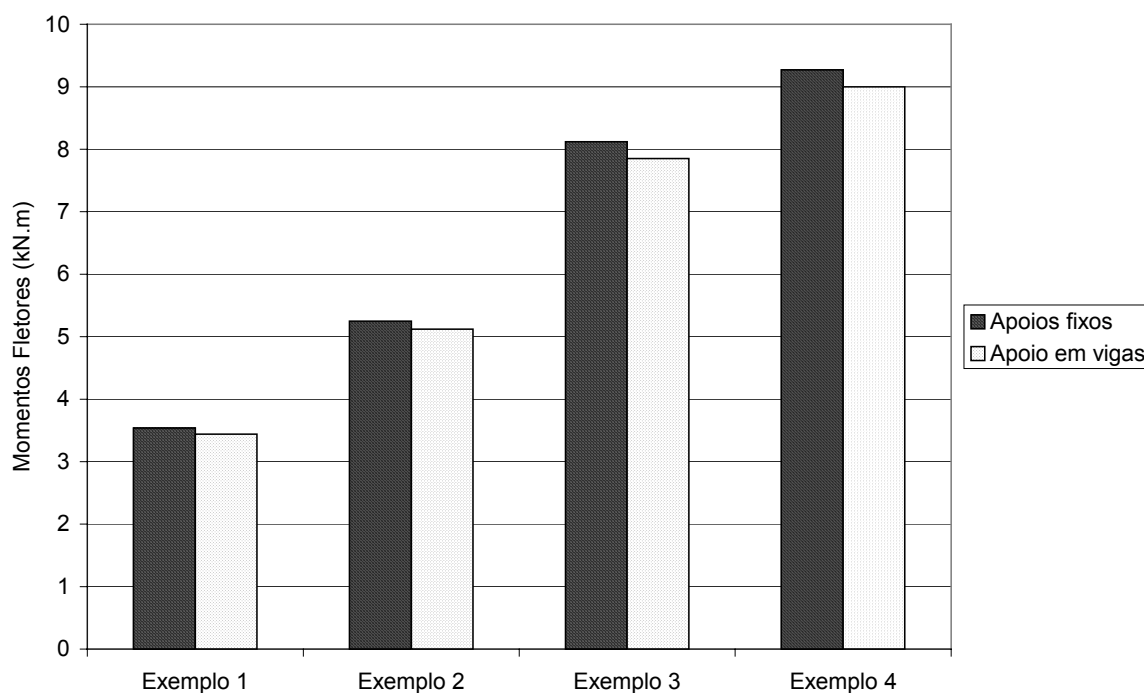


Figura 6.17 –Diferença entre as análises A1(J) e A7(20X50, J) para os momentos fletores máximos considerando a laje apoiada em 4 lados

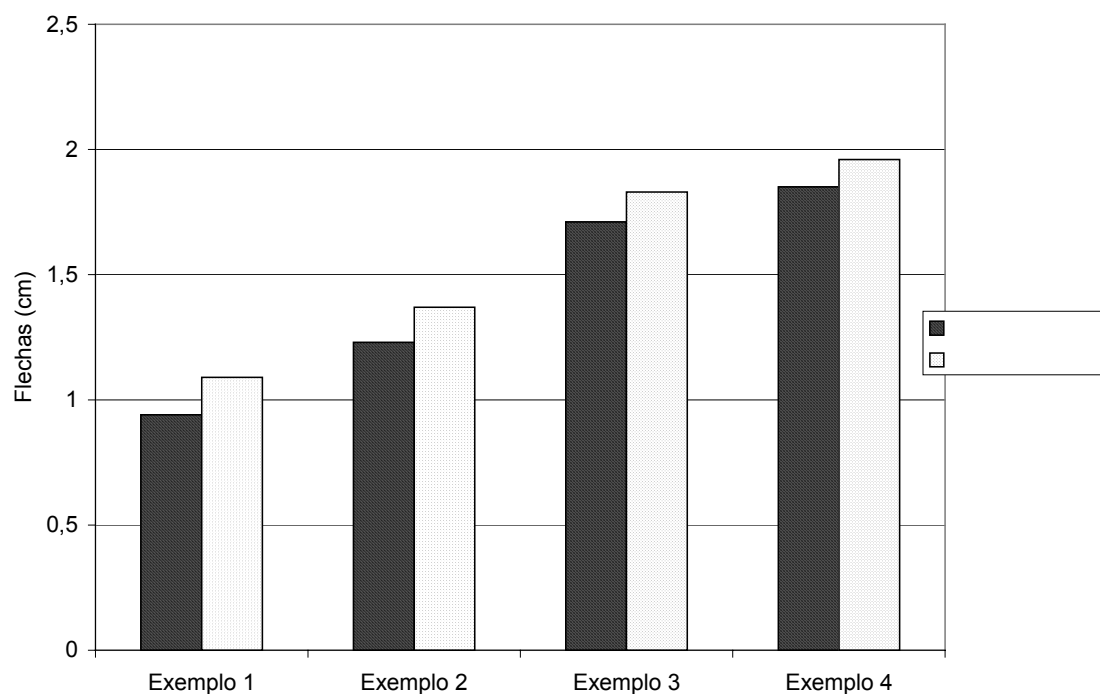


Figura 6.18 –Diferença entre as análises A1(J) e A7(20X50, J) para as flechas máximas considerando a laje apoiada em 4 lados

6.1.2 LAJES RETANGULARES

EXEMPLO 5 - Laje retangular com relação entre os lados $\frac{l_y}{l_x} = 1,5$, de 4 por 6 m, com nervuras nas duas direções. Neste exemplo será adotada distância livre entre nervuras de 50 cm, conforme a Figura 6.19.

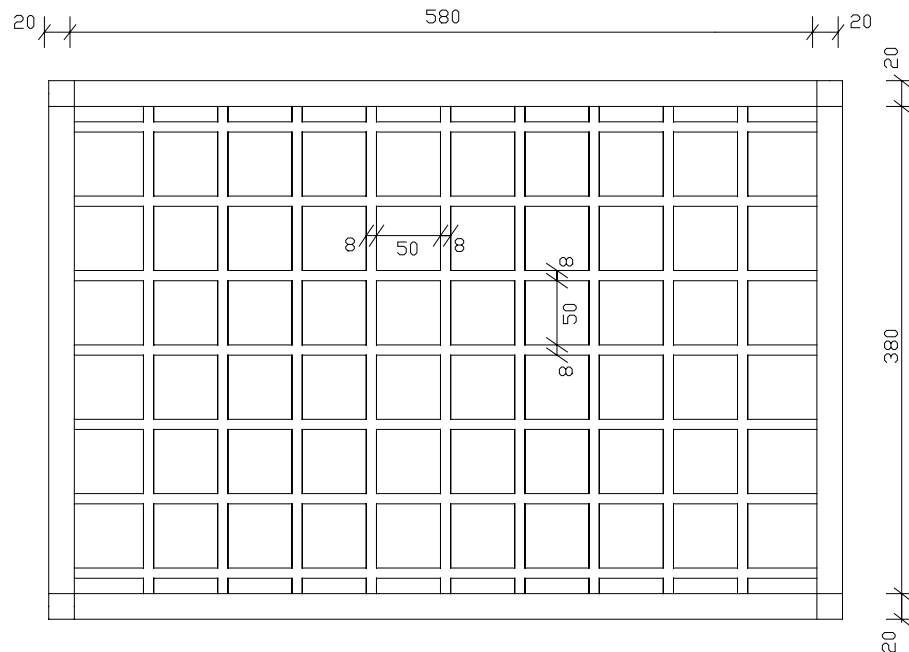


Figura 6.19- Laje nervurada retangular com relação entre os lados de 1,5 e com distância livre entre nervuras igual a 50 cm

O concreto utilizado deverá ter resistência característica à compressão aos 28 dias (f_{ck}) de 20 MPa. Para este concreto adotado, tem-se:

Módulo de deformação longitudinal secante (E_{cs}):

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad \text{com} \quad E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}}$$

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 21287,36 \text{ MPa} = 2,13 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade transversal (G):

$$G = 0,4 E_{cs}$$

$$G = 0,4 \times 21287,36 = 8514,95 \text{ MPa} = 8,52 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

A sobrecarga de utilização adotada é de $2,00 \text{ kN/m}^2$.

O pré-dimensionamento foi feito utilizando-se a equação 6.1 definida anteriormente, chegando-se a:

$$d = 14,4 \text{ cm}$$

Adota-se $h=16 \text{ cm}$.

A altura da mesa, segundo a NB-1/78, deverá ser igual a $a/15$, não inferior a 4 cm , devendo ser neste caso igual a 4 cm . A largura da nervura (b_w) será adotada igual a 8 cm .

As ações atuantes serão, então:

$$\text{Peso próprio da mesa} = 0,04 \times 25 = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Peso} \qquad \qquad \text{próprio} \qquad \qquad \text{das} \qquad \qquad \text{nervuras} \qquad \qquad = \\ \frac{[(0,08 \times 0,12 \times 0,58) + (0,08 \times 0,12 \times 0,5)] \times 25}{0,58 \times 0,58} = 0,77 \text{ kN/m}^2 \end{array}$$

$$\text{Revestimento} = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga de utilização} = 2,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Total das ações atuantes} = 4,77 \text{ kN/m}^2$$

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.20

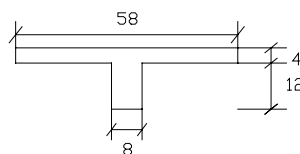


Figura 6.20- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 5

Como pode-se perceber, a seção utilizada neste exemplo é exatamente a mesma utilizada para o exemplo 2.

Da geometria da seção determinam-se:

$$\text{Coordenada } y \text{ do centro de gravidade da seção} = 4,34 \text{ cm}$$

$$\text{Momento de inércia à flexão da seção T: } I = 5807,09 \text{ cm}^4$$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2385,57 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10, obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 10,63 \text{ cm}$

Calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1987) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtém-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 4,27 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 5871,46 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2995,79 \text{ cm}^4$

6.1.2.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 5

As análises realizadas para o exemplo 5 foram as mesmas realizadas para os exemplos 1 a 4.

6.1.2.2 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 5

Tabela 6.33 –Resultado dos momentos fletores, torsões e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 5

Exemplo <u>5</u>	M_x KN.m	M_y KN.m	M_{xy} KN.m	flecha cm
A1(<i>J</i>)	5,14	2,04	0,62	0,69
A2(1% <i>J</i>)	5,71	2,24	0,01	0,76
A3(15% <i>J</i>)	5,62	2,21	0,1	0,75
A4(<i>J</i>_{K&B})	5,02	2,01	0,76	0,67
A5((<i>I</i> e <i>J</i>)_{K&B})	5,02	2,01	0,76	0,66
A6((<i>I</i> e 1% <i>J</i>)_{K&B})	5,71	2,24	0,01	0,75
A7(20x50, <i>J</i>)	4,70	2,53	0,49	0,92
A8(20x50, 1% <i>J</i>)	5,15	2,75	0,01	0,98
A9(20x50, <i>J</i>_{K&B})	4,60	2,49	0,60	0,91
A10(20x50, (<i>I</i> e <i>J</i>)_{K&B})	4,61	2,49	0,59	0,91
A11(20x50, (<i>I</i> e 1% <i>J</i>)_{K&B})	5,14	2,76	0,02	0,97
A12(TE-CZERNY)	3,49	1,88	2,94	0,43

EXEMPLO 6 - Laje retangular com relação entre os lados $\frac{l_x}{l_y} = 2$, de 4 por 8 m, com nervuras nas duas direções. Neste exemplo será adotada distância livre entre nervuras de 50 cm, conforme a Figura 6.21.

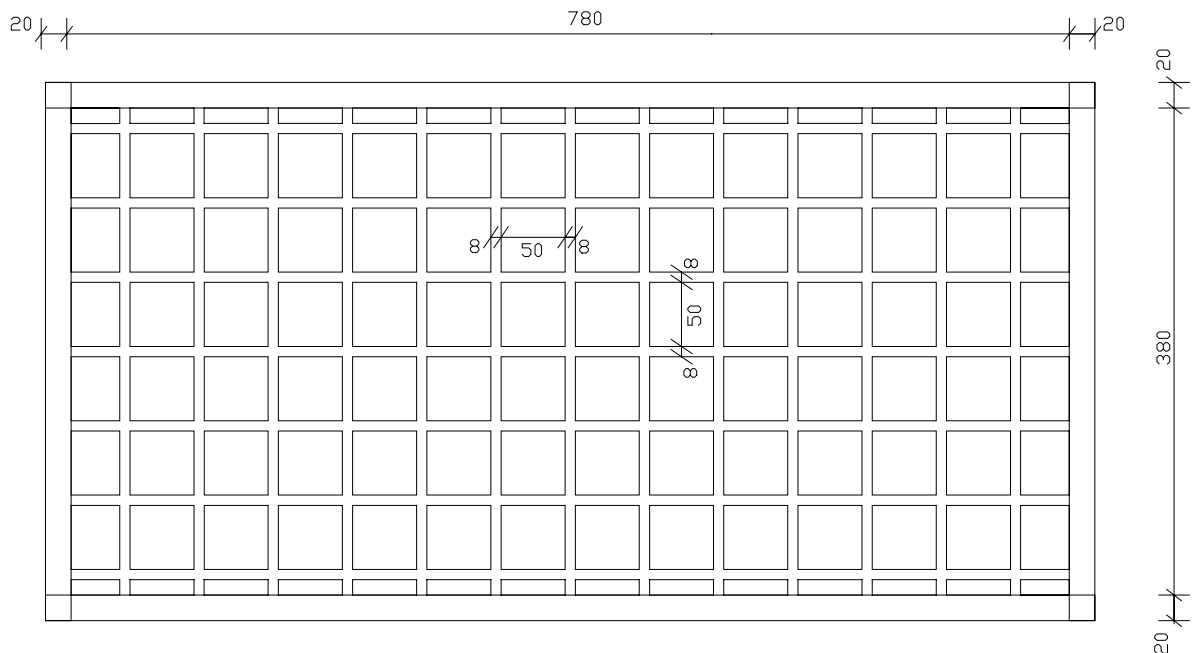


Figura 6.21- Laje nervurada retangular com relação entre os lados de 2 e com distância livre entre nervuras igual a 50 cm

O concreto utilizado deverá ter resistência característica à compressão aos 28 dias (f_{ck}) de 20 MPa. Para este concreto adotado, tem-se:

Módulo de deformação longitudinal secante (E_{cs}):

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad \text{com} \quad E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}}$$

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 21287,36 \text{ MPa} = 2,13 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade transversal (G):

$$G = 0,4 E_{cs}$$

$$G = 0,4 \times 21287,36 = 8514,95 \text{ MPa} = 8,52 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

A sobrecarga de utilização adotada é de 2,00 kN/m².

O pré-dimensionamento foi feito utilizando-se a equação 6.1 definida anteriormente, chegando-se a:

$$d = 14,4 \text{ cm}$$

Adota-se $h=16 \text{ cm}$.

A altura da mesa, segundo a NB-1/78, deverá ser igual a $a/15$, não inferior a 4 cm, devendo ser neste caso igual a 4 cm. A largura da nervura (b_w) será adotada igual a 8 cm. Percebe-se que as dimensões das nervuras são as mesmas do exercício anterior.

Portanto a carga utilizada também será a mesma do exercício anterior :

$$\text{Peso próprio da mesa} = 0,04 \times 25 = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Peso} \qquad \qquad \text{próprio} \qquad \qquad \text{das} \qquad \qquad \text{nervuras} \qquad \qquad = \\ \frac{[(0,08 \times 0,12 \times 0,58) + (0,08 \times 0,12 \times 0,5)] \times 25}{0,58 \times 0,58} = 0,77 \text{ kN/m}^2 \end{array}$$

$$\text{Revestimento} = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga de utilização} = 2,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Total das ações atuantes} = 4,77 \text{ kN/m}^2$$

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.22.

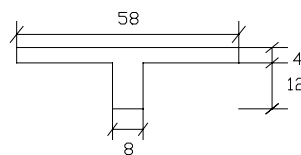


Figura 6.22- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 6

Da geometria da seção determinam-se:

$$\text{Coordenada } y \text{ do centro de gravidade da seção} = 4,34 \text{ cm}$$

$$\text{Momento de inércia à flexão da seção T: } I = 5807,09 \text{ cm}^4$$

$$\text{Momento de inércia à torção da seção T: } J = 2385,57 \text{ cm}^4$$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.10., obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 10,63 \text{ cm}$

Calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1987) de acordo com as equações 5.15, 5.14 e 2.51 respectivamente, obtendo-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 4,27 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 5871,46 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 2995,79 \text{ cm}^4$

6.1.2.3 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 6

As análises realizadas para o exemplo 6 são as mesmas realizadas para os exemplos anteriores.

6.1.2.4 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 6

Tabela 6.34 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 6

Exemplo <u>6</u>	M_x KN.m	M_y KN.m	M_{xy} KN.m	flecha cm
A1(<i>J</i>)	5,86	1,68	0,62	0,78
A2(1% <i>J</i>)	6,28	1,75	0,01	0,84
A3(15% <i>J</i>)	6,22	1,74	0,10	0,83
A4(<i>J</i>_{K&B})	5,76	1,68	0,76	0,77
A5((<i>I</i> e <i>J</i>)_{K&B})	5,76	1,68	0,76	0,76
A6((<i>I</i> e 1% <i>J</i>)_{K&B})	6,28	1,75	0,01	0,83
A7(20x50, <i>J</i>)	5,25	2,65	0,48	1,71
A8(20x50, 1% <i>J</i>)	5,59	2,74	0,01	1,75
A9(20x50, <i>J</i>_{K&B})	5,18	2,63	0,6	1,70
A10(20x50, (<i>I</i> e <i>J</i>)_{K&B})	5,17	2,64	0,59	1,69
A11(20x50, (<i>I</i> e 1% <i>J</i>)_{K&B})	5,58	2,75	0,01	1,74
A12(TE-CZERNY)	4,47	1,88	3,15	0,55

6.1.2.5 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EXEMPLOS 5 E 6

As Tabelas a seguir mostram algumas comparações entre as análises realizadas para os exemplo 5 e 6.

Tabela 6.35 –Diferença entre as análises 2 e 1 para os momentos fletores e flechas máximas

Diferença entre A2(1% J) / A1(J)	Mx (%)	My (%)	flecha (%)
Exemplo 5	11,09	9,80	10,14
Exemplo 6	7,17	4,17	7,69

Tabela 6.36 –Diferença entre a análise 1 e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas

Diferença entre A1(J)/A12(TE-CZERNY)	Mx (%)	My (%)	flecha (%)
Exemplo 5	47,28	8,51	60,00
Exemplo 6	31,10	-10,64	41,82

Tabela 6.37 – Diferença entre a análise 1 e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas

Diferença entre A2(1% J) / A12(TE-CZERNY)	Mx (%)	My (%)	flecha (%)
Exemplo 5	63,61	19,15	76,74
Exemplo 6	40,49	-6,91	41,82

Tabela 6.38 –Diferença entre as análises 8 e 7 para os momentos fletores e flechas máximas considerando as lajes com os 4 lados apoiados

Diferença entre A8(20X50,1% J) / A7(20X50, J)	Mx (%)	My (%)	flecha (%)
Exemplo 5	9,57	8,69	6,52
Exemplo 6	6,48	3,40	2,34

Tabela 6.39 –Diferença entre as análises 1 e 7 para os momentos fletores, torsores e flechas máximas considerando as lajes com os 4 lados apoiados

Diferença entre A1(J) / A7(20X50, J)	Mx (%)	My (%)	Mxy (%)	Flecha (%)
Exemplo 5	9,36	-19,37	26,53	-25,00
Exemplo 6	11,62	-36,60	29,17	-54,39

- É interessante observar, de uma maneira geral, que nas comparações entre as análises feitas nas Tabelas 6.35 a 6.38, mostram que as diferenças entre os momentos fletores se faz sentir de forma diferente nas duas direções, sendo que o momento na menor direção (Mx) é que sofreu sempre maior variação.
- Ao analisar a Tabela 6.35, nota-se que quando a rigidez à torção da nervura é considerada integralmente, a diminuição nos valores dos momentos fletores e flechas é menor do que para a laje quadrada, mostrada anteriormente, que era em torno de 17% e 16% para os momentos fletores e flechas, respectivamente. E ainda, para a laje com $\frac{l_y}{l_x} = 2$ essa diminuição é ainda menor do que para a laje com $\frac{l_y}{l_x} = 1,5$.
- Ao se comparar os resultados obtidos calculando a laje nervurada como placa pela teoria da elasticidade(A12(TE-CZERNY)) com os resultados obtidos através do modelo de analogia de grelha,

considerando a rigidez à torção integral da seção da barra da grelha (análise 1) ou considerando 1% da rigidez à torção (análise 2), as diferenças encontradas para os momentos fletores M_x (menor direção) e para as flechas são grandes (conforme pode ser observado nas Tabelas 6.36 e 6.37), entretanto essa diferença para os momentos fletores M_y (maior direção) é bem menor. Um fato curioso, é que para $\frac{l_y}{l_x} = 2$, o momento fletor M_y calculado como

placa elástica passa a ser maior do que o mesmo momento calculado tanto pela análise 1 como pela análise 2.

- Quando utiliza-se o coeficiente δ proposto por HANN para considerar nula a rigidez à torção no cálculo como placa pela teoria da elasticidade, obtém-se os valores mostrados na Tabela 6.40

Tabela 6.40 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade multiplicados pelo fator $\delta = 1,44$ (para o exemplo 5) e $\delta = 1,24$ (para o exemplo 6) e a diferença percentual desses valores com a análise

2

Variação do espaçamento das nervuras	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ		Diferenças com A2(1% J)	
	M_x (KN.m)	M_y (kN.m)	M_x (%)	M_y (%)
Exemplo 5	5,03	2,71	13,52	-17,34
Exemplo 6	5,54	2,33	13,36	-24,89

Analisando-se a Tabela acima, percebe-se que ao se introduzir o coeficiente δ nos resultados dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade, a diferença entre esses novos resultados e os obtidos pelo modelo de analogia de grelha considerando 1% de J (análise 2), diminuem para os valores de M_x , entretanto para os valores de M_y essas diferenças aumentam. Isso ocorreu porque ao multiplicar o coeficiente δ pelos M_y , estes se tornam maiores do que os valores obtidos pela análise 2. De qualquer forma, essas diferenças foram bem maiores do que as obtidas para as lajes

quadradas estudadas anteriormente, mostrando que a introdução do coeficiente δ é mais eficiente para lajes quadradas do que para lajes retangulares.

- Para esses dois exemplos, assim como para os exemplos de laje quadrada, as diferenças encontradas entre os momentos fletores e deslocamentos para a consideração de 1% de J (análise 2) e 15% de J (análise 3) foram muito pequenas (menores que 2%).
- Comparando-se os resultados das análises $A1(J)$ e $A4(J_{K\&B})$ pode-se perceber que a diferença encontrada entre os resultados obtidos através de J calculado pela equação 5.16 e J calculado pela equação 2.51 (KENNEDY & BALI) é muito pequena, não chegando a 3% para momentos fletores e deslocamentos. Entretanto para os momentos torsores esse valor é maior, sendo que quando calcula-se J pela eq. 2.51 os valores obtidos são em torno de 23% maiores do que quando utiliza-se J calculado pela equação 5.16. Essas diferenças são menores do que as encontradas para a laje quadrada (exemplo 2, que possui mesmas dimensões das nervuras). É interessante notar também, que essas diferenças são menores para o exemplo 6, onde a relação entre os lados é 2.
- Comparando-se as análises $A4(J_{K\&B})$ e $A5((I \text{ e } J)_{K\&B})$, e as análises $A2(1\% J)$, e $A6((I \text{ e } 1\% J)_{K\&B})$, para os exemplos 5 e 6, percebe-se que ao considerar I calculado pela equação 5.13 ou pela equação 5.14 (KENNEDY & BALI), praticamente não influencia na obtenção dos resultados.
- Através da análise da Tabela 6.38, nota-se que, assim como ocorreu para a laje apoiada em bordos fixos, quando se considera a laje apoiada em vigas, as diferenças encontradas ao se considerar J integral e 1% de J diminuem quando a relação entre os lados aumenta, e verifica-se, assim como para as lajes quadradas estudadas anteriormente, que essas diferenças são menores do que quando se considera a laje apoiada em bordos fixos. Com relação às observações feitas para J (eq. 5.16), J (eq. 2.51), I (eq. 5.13) e I (eq. 5.14) feitas anteriormente para essas lajes apoiadas em

bordos fixos, valem também para este caso (laje apoiada em vigas), com pequenas modificações nos valores das diferenças encontradas.

- É interessante também observar para esses casos de lajes, que quando se considera a laje apoiada em vigas ao invés de bordos fixos, o momento fletor na menor direção (M_x) diminui e o momento fletor na maior direção (M_y) aumenta. Percebe-se, através da Tabela 6.39, que ao se considerar os dois exemplos apoiados em vigas de mesma seção, as diferenças entre os esforços e deslocamentos irão aumentar com o aumento da relação entre os lados.
- Foram analisados, também, casos considerando-se carga de parede nas vigas de borda, provocando um aumento nos momentos M_y e uma diminuição em M_x e M_{xy} . Isto serviu para mostrar a influência do carregamento da viga nos esforços da laje, haja visto que como todo o conjunto é analisado pelo processo de analogia de grelha, uma modificação no carregamento de uma barra de viga irá influenciar todas as outras barras da laje.
- Outro aspecto estudado foi a influência da rigidez das vigas de borda e verificou-se que quando aumentava-se a rigidez dessas vigas, os momentos M_x e M_{xy} aumentavam e os M_y diminuía, ou seja, a laje apresentou um comportamento tendendo ao caso em que a laje é considerada apoiada em bordos fixos, como já era de se esperar.

6.1.3 LAJE RETANGULAR DE MAIORES DIMENSÕES

EXEMPLO 7 – Laje retangular de 10,11 por 11,30 m com nervuras nas duas direções. A distância livre entre nervuras é de 50 cm, conforme pode ser observado na Figura 6.23.

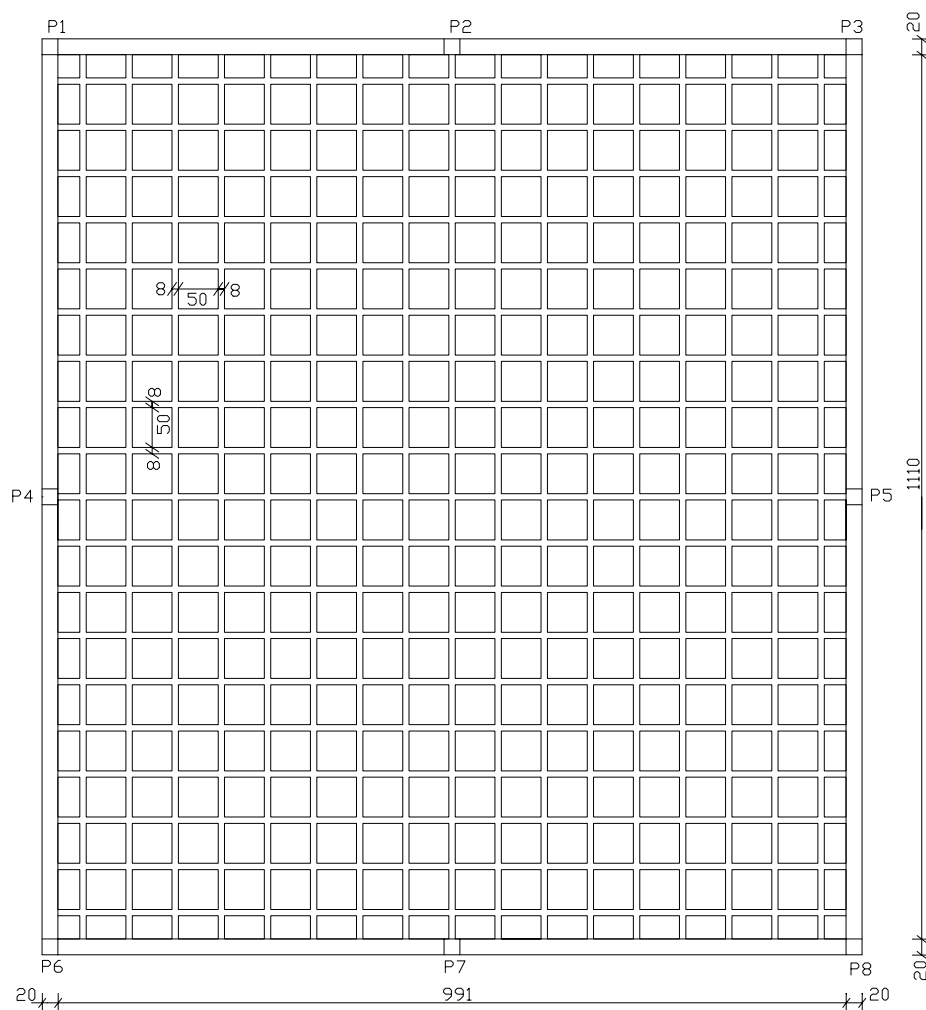


Figura 6.23- Laje nervurada retangular com distância livre entre nervuras igual a 50 cm

O concreto utilizado deverá ter resistência característica à compressão aos 28 dias (f_{ck}) de 25 MPa. Para este concreto adotado, tem-se:

Módulo de deformação longitudinal secante (E_{cs}):

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \text{ com } E_{ci} = 5600\sqrt{fck}$$

$$fck = 25 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 23800 \text{ MPa} = 2,38 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade transversal (G):

$$G = 0,4 E_{cs}$$

$$G = 0,4 \times 23800 = 9520 \text{ MPa} = 9,52 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

A sobrecarga de utilização adotada é de $2,00 \text{ kN/m}^2$.

O pré-dimensionamento pode ser feito da mesma forma que os exemplos anteriores através da equação 5.16, resultando em:

$$d \cong 26 \text{ cm}$$

Adota-se $h = 29 \text{ cm}$

A altura da mesa, segundo a NB-1/78, deverá ser igual a $a/15$, não inferior a 4cm, devendo ser neste caso igual a 4 cm. A largura da nervura (b_w) será adotada igual a 8 cm.

As ações atuantes serão, então:

$$\text{Peso próprio da mesa} = 0,04 \times 25 = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\begin{array}{lclcl} \text{Peso} & \text{próprio} & \text{das} & \text{nervuras} & = \\ \frac{[(0,08 \times 0,25 \times 0,58) + (0,08 \times 0,25 \times 0,5)] \times 25}{0,58 \times 0,58} & & & & = 1,61 \text{ kN/m}^2 \end{array}$$

$$\text{Revestimento} = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Paredes divisórias leves} = 0,50 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga de utilização} = 2,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Total das ações atuantes} = 6,11 \text{ kN/m}^2$$

A seção a ser considerada será um T, conforme a Figura 6.24.

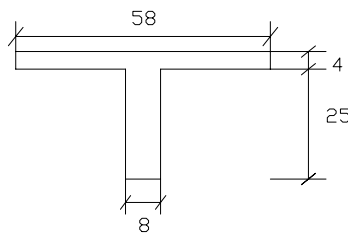


Figura 6.24- Seção a ser considerada para as barras da grelha do exemplo 7

Da geometria da seção determinam-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 8,71 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 33308,41 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 4590,83 \text{ cm}^4$

Para o cálculo da flecha, segundo a Teoria da Elasticidade é necessário calcular uma espessura equivalente a uma laje maciça, de acordo com a equação 5.1, obtendo-se desta forma : $h_{eq} = 19,03 \text{ cm}$

Também foram feitas outras análises calculando y , I e J conforme propôs KENNEDY & BALI (1979) de acordo com as equações 5.6, 5.5 e 2.43 respectivamente, obtendo-se:

Coordenada y do centro de gravidade da seção = 8,57 cm

Momento de inércia à flexão da seção T: $I = 33747,39 \text{ cm}^4$

Momento de inércia à torção da seção T: $J = 7406,31 \text{ cm}^4$

6.1.3.1 ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 7

Serão feitas, para essa laje, análises que levam em conta a mesa da laje nervurada. Ou seja, as nervuras serão discretizadas como elementos de barra e a mesa será discretizada por elementos finitos de placa. Entretanto, os programas normalmente adotam o modelo da Figura 6.25, ou seja, a mesa é considerada no eixo da barra. Com isto, a barra perde o efeito de colaboração da mesa e há uma alteração no momento resistido pela barra e placa. Para contornar este problema, a inércia da barra será considerada como de uma seção T, conforme a Figura 6.26.

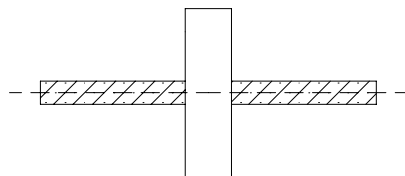


Figura 6.25 –Laje nervurada entendida em programas de Elementos Finitos (Capeamento no eixo da nervura), MELO & FONTE (2000)

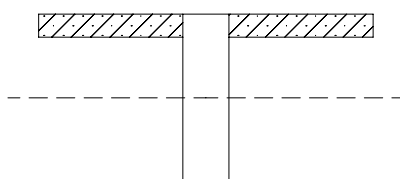


Figura 6.26 –Laje nervurada como deve ser entendida em programas de Elementos Finitos (nervura com seção T), MELO & FONTE (2000)

Análise 1- A1(J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção da seção transversal integral (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 2- A2(mesa, J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção da seção transversal integral (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).
- Mesa discretizada com elementos finitos de placa.

Análise3 – A3(1% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 1% do valor calculado (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise4 – A4(mesa, 1% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 1% do valor calculado (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).
- Mesa discretizada com elementos finitos de placa.

Análise 5 – A5(15% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 15% do valor calculado. (conforme recomendação da Norma NBR-6118/2001, item 14.6.7.2). (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 6– A6(mesa, 15% J):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.

- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 15% do valor calculado. (conforme recomendação da Norma NBR-6118/2001, item 14.6.7.2). (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).
- Mesa discretizada com elementos finitos de placa.

Análise 7 – A7((I e J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI pelas equações 5.14 e 2.51, respectivamente.

Análise 8 – A8((I e 1% J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em apoios sem deslocamentos verticais.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI, pelas equações 5.14 e 2.51, respectivamente, porém com o momento de inércia à torção correspondente a 1% do valor obtido pela equação 5.14.

Análise 9 – A9(20X50, J):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção da seção transversal integral. (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 10 - A7(20X50, 1% J):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia a torção correspondente a 1% do valor calculado (I e J calculados pelas equações 5.13 e 5.16, respectivamente).

Análise 11 - A11(20X50, (I e J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.

- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI pelas equações 5.14 e 2.51, respectivamente.

Análise 12 - A12(20X50, (I e 1% J)_{K&B}):

- Laje apoiada nas bordas em vigas de 20/50.
- Nervuras discretizadas como vigas “T”, formando uma grelha.
- Considerando momento de inércia à flexão e à torção calculados segundo KENNEDY & BALI, pelas equações 5.14 e 2.51, respectivamente, porém com o momento de inércia à torção correspondente a 1% do valor obtido pela equação 2.51.

Análise 13 – A13(TE-CZERNY):

- Cálculo da laje nervurada como placa, através da Teoria da Elasticidade, utilizando as Tabelas de Czerny.

6.1.3.2 RESULTADOS DAS ANÁLISES REALIZADAS PARA O EXEMPLO 7

Tabela 6.41 –Resultado dos momentos fletores, torsores e flechas máximas para as diversas análises efetuadas para o exemplo 7

Exemplo <u><i>Z</i></u>	M _x KN.m	M _y KN.m	M _{xy} KN.m	flecha cm	Mesa	
					m _x KNm/m	m _y KNm/m
A1(<i>J</i>)	32,65	25,42	1,82	4,44	-----	-----
A2(mesa, <i>J</i>)	32,05	24,94	1,79	4,36	0,65	0,56
A3(1% <i>J</i>)	34,40	26,80	0,02	4,67	-----	-----
A4(mesa, 1% <i>J</i>)	33,73	26,27	0,02	4,58	0,69	0,59
A5(15% <i>J</i>)	34,14	26,60	0,28	4,63	-----	-----
A6(mesa, 15% <i>J</i>)	33,48	26,08	0,28	4,55	0,68	0,59
A7((<i>I e J</i>) _{K&B})	31,69	24,65	2,83	4,26	-----	-----
A8((<i>I e 1% J</i>) _{K&B})	34,39	26,79	0,03	4,6	-----	-----
A9(20x50, <i>J</i>)	32,57	25,89	1,49	4,52	-----	-----
A10(20x50, 1% <i>J</i>)	34,24	27,27	0,02	4,74	-----	-----
A11(20x50, (<i>I e J</i>) _{K&B})	31,65	25,13	2,30	4,34	-----	-----
A12(20x50, (<i>I e J</i>) _{K&B})	34,23	27,27	0,03	4,68	-----	-----
A13(TE, CZERNY)	18,78	16,24	20,15	2,19	-----	-----

6.1.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA O EXEMPLO 7

- Analisando os resultados da Tabela 6.41, percebe-se que a influência nos resultados obtidas ao discretizar a mesa como elementos finitos de placa é muito pequena, ocorrendo uma pequena diminuição nos valores dos esforços nas nervuras, assim como dos deslocamentos. Isto se deve ao fato da mesa influenciar na rigidez à torção da laje nervurada.
- É interessante observar neste exemplo, que a diferença encontrada entre se considerar a rigidez à torção integral da seção (análise 1) e considerar apenas 1% dessa rigidez (análise 3) é em torno de 5% para os momentos fletores e flechas, ou seja, bem menor do que os valores obtidos para os exemplos de laje quadrada, que foram em média de 17%. Também são menores do que os valores obtidos para as lajes retangulares (exemplos 5 e 6), como pode ser visto na Tabela 6.35.
- Ao se comparar os resultados calculando a laje nervurada como placa pela teoria da elasticidade (A12(TE-CZERNY)) com os resultados obtidos por analogia de grelha, considerando a rigidez à torção integral da seção da barra da grelha (análise 1), ou considerando apenas 1% dessa rigidez (análise 3), as diferenças encontradas entre os esforços e deslocamentos são grandes, como pode ser observado na Tabela 6.42, maiores do que as obtidas para os exemplos anteriores.

Tabela 6.42 – Diferença entre as análises 1 e 3, e o cálculo como placa através da teoria da elasticidade para os momentos fletores e flechas máximas da laje do exemplo 7

Diferença entre análises	Mx (%)	My (%)	flecha (%)
A1(J)/A12(TE-CZERNY)	73,76	56,53	102,74
A3(1%J)/A12(TE-CZERNY)	83,17	65,02	113,24

- Quando utiliza-se o coeficiente δ proposto por HANN para considerar nula a rigidez à torção no cálculo como placa pela teoria da elasticidade, obtém-se os valores mostrados na Tabela 6.43:

Tabela 6.43 – Valores dos momentos obtidos através do modelo de placa pela teoria da elasticidade multiplicados pelo fator $\delta = 1,69$ e a diferença percentual desses valores com a análise 3

Caso estudado	Resultados de A12(TE-CZERNY) x δ		Diferenças com A3(1% J)	
	Mx (kNm/N)	My (kNm/N)	Mx (%)	My (%)
Exemplo 7	31,57	27,28	8,96	-1,76

- Analisando-se a Tabela 6.43 percebe-se que ao se introduzir o coeficiente δ no cálculo como placa elástica, a diferença entre esses novos resultados e os obtidos pelo modelo de analogia de grelha considerando 1% de J (análise 3) diminuem bastante.
- Para este exemplo, as diferenças encontradas entre os resultados de momentos fletores e deslocamentos para a consideração de 1% de J (análise 3) e 15% de J (análise 5) foram insignificantes (não chegaram a 1%), menores ainda do que as diferenças obtidas nos exemplos anteriores.
- Comparando os resultados obtidos através das análises A1(J) e A7($((I e J)_{K\&B})$), percebe-se que ao se considerar I e J calculados pelas maneiras convencionais, através das equações 5.13 e 5.16 respectivamente, ou I e J calculados através da maneira proposta por KENNEDY & BALI (eq. 5.14 e 2.51, respectivamente), a variação dos resultados obtidos é muito pequena (assim como para os outros exemplos mostrados anteriormente), em torno de 3 % para os momentos fletores e 4 % para as flechas.

- Assim como nos exemplos estudados anteriormente, as diferenças encontradas ao se considerar J integral e 1% de J foram menores quando a laje é considerada apoiada em vigas ao invés de bordos fixos. As observações com relação ao J (eq. 5.16), J (eq. 2.51), I (eq. 5.13) e I (eq. 5.14) feitas para a laje apoiada em bordos fixos, valem também para este caso (laje apoiada em vigas), com pequenas modificações nos valores obtidos.
- Para esta laje, assim como para as outras lajes retangulares (exemplos 5 e 6), quando se considera a laje apoiada em vigas ao invés de bordos fixos, o momento fletor na menor direção (M_x) diminui e o momento na maior direção (M_y) aumenta, assim como a flecha.

6.2 VIGA T DISCRETIZADA INTEIRAMENTE POR ELEMENTOS FINITOS

Como foi feito um estudo da laje nervurada discretizada inteiramente por elementos finitos, e sendo este bastante complexo, achou-se conveniente estudar primeiramente uma viga T, simplesmente apoiada, discretizada inteiramente por elementos finitos, pois a mesma representa uma seção transversal desse tipo de laje. Além disso, esse estudo foi muito importante para se desenvolver uma familiarização com este modelo, que realmente é bastante complicado de se trabalhar.

Uma das dificuldades encontradas, por exemplo, foi como apoiar essa viga, ou seja, em quais nós da nervura considerar o apoio. As Figura 6.27 e 6.28 mostram algumas das formas possíveis de se apoiar essa viga.

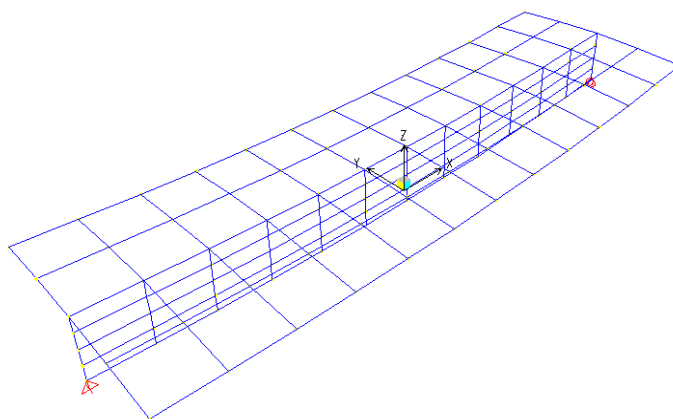


Figura 6.27 – Viga T discretizada por elementos finitos, apoiada apenas no nó inferior da alma

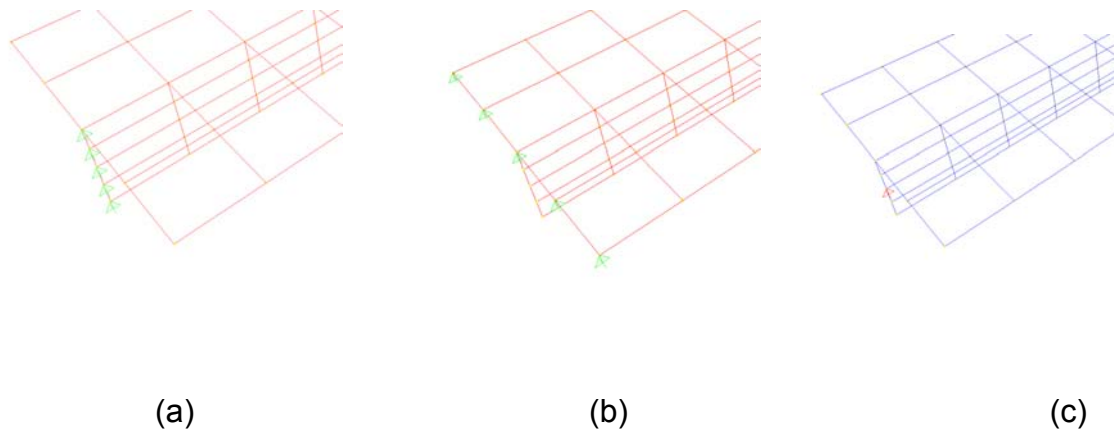


Figura 6.28 – (a) Viga T apoiada em todos os nós da alma; (b) apoiada no nó superior da alma e na mesa; (c) apoiada no nó central da alma

Foram testadas muitas outras formas de se apoiar essa viga, além dessas mostradas nas Figuras.

Dos exemplos testados pode-se fazer algumas observações com relação a essas vinculações:

- Quando o deslocamento na direção do eixo longitudinal (X) da viga é restringido no apoio esquerdo e no direito, irão surgir reações horizontais grandes nesses apoios (a não ser que os apoios sejam considerados na altura do centro de gravidade). Além disso, as flechas obtidas quando se considera esse tipo de apoio varia bastante com a posição do mesmo. Por exemplo, se esse apoio é colocado no nó inferior da alma (Figura 6.1), a flecha obtida no centro da viga é muito menor do que quando esse apoio é colocado no nó superior (Figura 6.2). Isto ocorre porque quando os dois extremos inferiores da viga estão impedidos de se deslocar na direção X, a flexão da viga (rotação ao redor de Y) ficará bastante restringida. Entretanto se os apoios forem colocados nos extremos superiores da viga, a mesma terá maior possibilidade de flexão, pois os nós inferiores da alma estão livres para se deslocar na direção X, e conseqüentemente a flecha será bem maior.
- Entretanto, quando se considera fixo o deslocamento na direção X em apenas um dos apoios (esquerdo ou direito), as diferenças encontradas com a variação da posição do apoio (altura) são bastante pequenas.

- É importante observar que se o apoio for feito em toda altura da alma (Figura 6.3), e se em todos esses nós for impedido o deslocamento na direção X, esse apoio se comportará como um engaste, pois a rotação ao redor de Y fica bastante restringida.
- Outro aspecto notado foi que a consideração da restrição do deslocamento vertical do apoio, independente da posição em que é feita (nó superior, nó inferior, no central...) ou em quantos nós (apenas no superior, apenas no inferior, apenas no central, em todos, em alguns), não influencia nos resultados obtidos.

Outra dificuldade encontrada diz respeito ao tipo de elemento que se deve utilizar: placa, membrana ou casca. No caso dessa viga, também foram feitos vários testes. A mesa precisou ser discretizada como elemento de casca, uma vez que existem esforços de placa e esforços normais devido à contribuição da mesa na flexão. A alma foi inicialmente discretizada como elemento de membrana e posteriormente como elemento de casca, sendo que os resultados obtidos foram os mesmos. Isso ocorreu porque, para este caso, a alma só estava sujeita a esforços no plano da mesma. O que se recomenda, portanto, é que se utilize o elemento de casca, tanto para a mesa, como para a alma, pois quando existir um carregamento qualquer atuando na viga, de forma que não se saiba como ela irá se comportar, esse elemento é o mais geral e irá considerar todos os esforços que existirão na mesma.

Outro parâmetro difícil de ser analisado para esse tipo de modelagem é com relação aos momentos fletores. A forma utilizada para de se obter o valor do momento fletor para uma determinada seção transversal dessa viga, foi a seguinte: traçou-se o diagrama de tensões nesta seção para a nervura e para a mesa; em seguida achou-se as resultantes das forças, as quais foram multiplicadas pela distância até o centro de gravidade da seção. O momento obtido desta forma, para esta viga em questão, resultou bastante próximo do momento obtido pela resistência dos materiais para uma viga biapoiada, assim como os deslocamentos.

6.3 LAJES NERVURADAS DISCRETIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS

Depois do estudo feito para a viga T, mostrado no item anterior, deu-se início à modelagem das lajes nervuradas discretizadas por elementos finitos.

As lajes estudadas aqui são as mesmas estudadas pelo método de analogia de grelha (do exemplo 1 a 4), a fim de se comparar os resultados obtidos.

É importante salientar que as dificuldades encontradas para a modelagem em elementos finitos foram muitas, a começar pelos graus de liberdade dos apoios, até a obtenção dos momentos fletores.

Exemplo 1

O exemplo 1 do modelo de analogia de grelha vai ser agora discretizado inteiramente por elementos finitos, como pode ser observado na Figura 6.29:

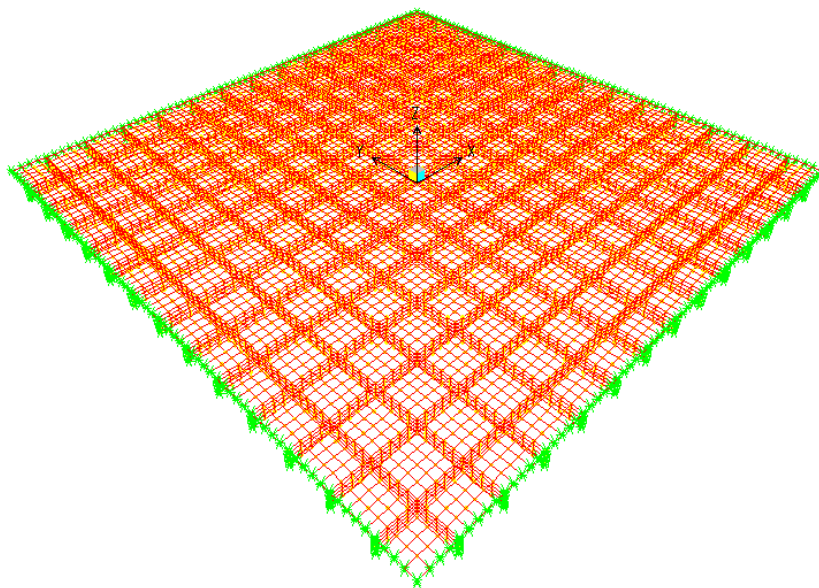


Figura 6.29 - Laje nervurada do exemplo 1 discretizada inteiramente por elementos finitos

Foi utilizada para a mesa uma malha quadrada de 7,6 x 7,6 cm e para as nervuras foi utilizada uma malha retangular de 7,6 cm de largura por 3,5 cm de altura. As malhas, em todos os exemplos, foram escolhidas de forma a não apresentarem descontinuidades significativas de tensões entre elementos.

Primeiramente a laje foi considerada apoiada em todos os nós do contorno, com restrições de deslocamentos apenas na vertical (dz), que parece ser o modelo mais simples de ser entendido. Entretanto como pode ser visto na Figura 6.30, existem ao longo do contorno da laje onde chegam as nervuras, nós em 5 alturas diferentes.

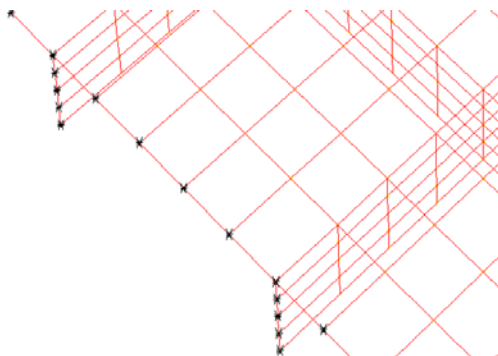
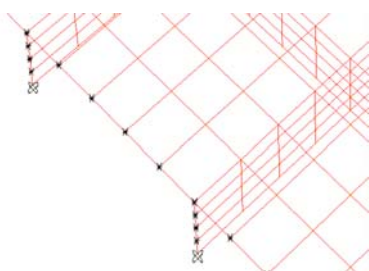
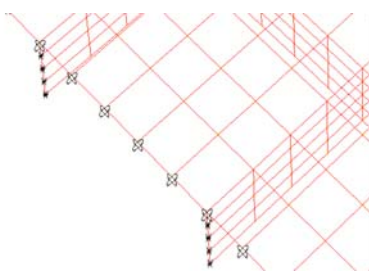


Figura 6.30 – Parte do bordo da laje nervurada do exemplo 1

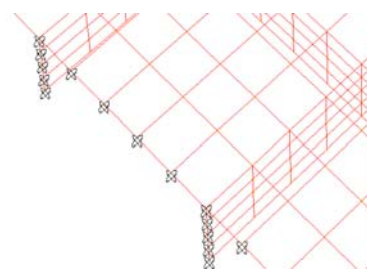
Portanto, assim como no caso da viga T, foi estudado também para esta laje a influência da altura dos nós em que a laje está sendo apoiada. Por exemplo, a laje pode ser considerada apoiada apenas nos nós inferiores (Figura 6.31a), apenas nos nós superiores (Figura 6.31b), assim como em toda altura (Figura 6.31c).



(a)



(b)



(c)

Figura 6.31 – (a) Laje apoiada somente nos nós inferiores; (b) laje apoiada nos nós superiores; (c) laje apoiada em todos os nós do contorno

Foram feitas 6 análises, 5 dessas considerando a laje apoiada em cada uma das 5 diferentes alturas de nós e uma considerando a laje apoiada em todos os nós do contorno (Figura 6.31c), concluindo que não houve variação dos resultados obtidos. Portanto, para comparação com os resultados obtidos pelo modelo de analogia de grelha, achou-se conveniente considerar a laje apoiada em todos os nós do contorno da laje com restrições de deslocamentos apenas na vertical (dz), sendo que este caso de apoio foi chamado de modelo 0. Como nos exemplos de analogia de grelha não fora feito um estudo para um caso onde os apoios tivessem restrições apenas de deslocamentos verticais (pois na análise 1, além dessa restrição, também foi restringida a rotação ao redor do eixo perpendicular ao apoio para simular um apoio fixo), foi feita uma outra análise por analogia de grelha para o exemplo 1 (análise 0), onde os nós dos apoios tiveram apenas restrições de deslocamentos verticais, liberando a rotação ao redor do eixo do apoio. Os resultados dos deslocamentos obtidos estão mostrados na Tabela 6.44.

Tabela 6.44 – Valores das flechas obtidas através do modelo 0 em EF e a análise 0 em analogia de grelha para o exemplo 1

Flecha (cm)	Flecha (cm)
EF	Analogia de grelha
0,80	0,97

Pode-se observar que a flecha obtida por elementos finitos foi menor do que a obtida por analogia de grelha.

Para poder comparar a análise 1 da grelha, onde a laje nervurada é considerada apoiada em bordos fixos, tentou-se simular o mesmo tipo de apoio. Para isso, todos os nós do contorno da laje tiveram os deslocamentos verticais e rotações ao redor do eixo perpendicular aos apoios restringidos (modelo 1). Os resultados dos deslocamentos obtidos estão mostrados na Tabela 6.45.

Tabela 6.45 – Valores das flechas obtidas através do modelo 1 em EF e a análise 1 em analogia de grelha para o exemplo 1

Flecha (cm) EF	Flecha (cm) Analogia de grelha
0,78	0,94

Tabela 6.46 – Diferenças percentuais obtidas entre as flechas dos modelos 1 e 0 em EF, e entre as análises 0 e 1 em analogia de grelha para o exemplo 1

Diferença entre as análises	Flecha (%)
Modelo0/modelo1	2,56
análise 0/análise 1	3,19

Percebe-se da Tabela 6.46 que as diferenças percentuais entre as flechas dos modelos em elementos finitos e analogia de grelha resultaram próximas. Portanto para que se possa comparar a análise 1 de analogia de grelha com a discretização em elementos finitos, todos os outros exemplos em elementos finitos foram estudados com as mesmas condições de apoio do modelo 1.

O cálculo do momento fletor foi feito da mesma forma que para a viga T, ou seja, traçou-se o diagrama de tensões para a seção do meio do vão (onde o momento fletor obtido é máximo) para a nervura e para a mesa; em seguida achou-se as resultantes das forças, as quais foram multiplicadas pela distância até o centro de gravidade da seção. Entretanto um fato interessante que não havia ocorrido no estudo da viga T, é que ao fazer o somatório das forças normais atuantes na nervura+mesa, este somatório resultou diferente de zero. Para este exemplo, a força resultante encontrada nas seções T (nervura+mesa) foi de tração, com exceção das duas seções T mais próximas dos bordos, onde a força resultante foi de compressão.

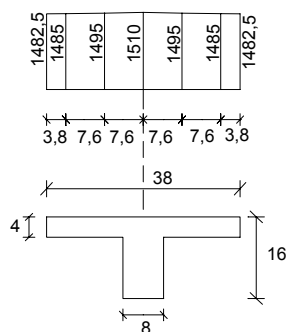
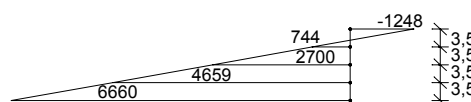
Diagrama de tensões de compressão na mesa (kN/m²)Diagrama de tensões na nervura (kN/m²)

Figura 6.32 - Seção T da laje do exemplo 1, com diagrama de tensões atuantes na mesa e na nervura central da laje

Foi estudado um segundo modelo em elementos finitos similar à análise 2 em analogia de grelha, ou seja, as nervuras não apresentam rigidez à torção. Este modelo foi chamado de modelo 2. Uma maneira encontrada para que se pudesse desprezar a rigidez à torção das nervuras, neste caso em que a laje está sendo estudada por elementos finitos, seria discretizá-la como elemento de membrana, pois desta forma não haverá comportamento fora do plano da nervura, e assim sendo, a mesma não oferecerá resistência à torção. Entretanto como o modelo de membrana do SAP2000 não é o modelo de estado plano de tensões usual, pois além das translações ele permite a rotação no plano do elemento, será utilizado o elemento PLANE do SAP2000, pois este representa realmente o estado plano de tensões, onde somente as translações no plano são permitidas. Os deslocamentos encontrados ao se considerar elemento PLANE foram em torno de 2% menores do que quando considerou-se elemento de membrana.

Foi analisado um terceiro modelo em elementos finitos, similar à análise 7 em analogia de grelha, onde a laje é considerada apoiada em vigas de 20/50, considerando-se a rigidez à torção das nervuras, porém a rigidez à torção das vigas de borda é desprezada. Este modelo foi chamado de modelo 3.

Assim como ocorreu para o modelo 1, efetuando-se o somatório das forças normais atuantes na nervura+mesa para os modelos 2 e 3, este somatório resultou diferente de zero, conforme será mostrado mais adiante.

Exemplo 2

O exemplo 2 do modelo de analogia de grelha vai ser agora discretizado inteiramente por elementos finitos, como pode ser observado na Figura 6.33:

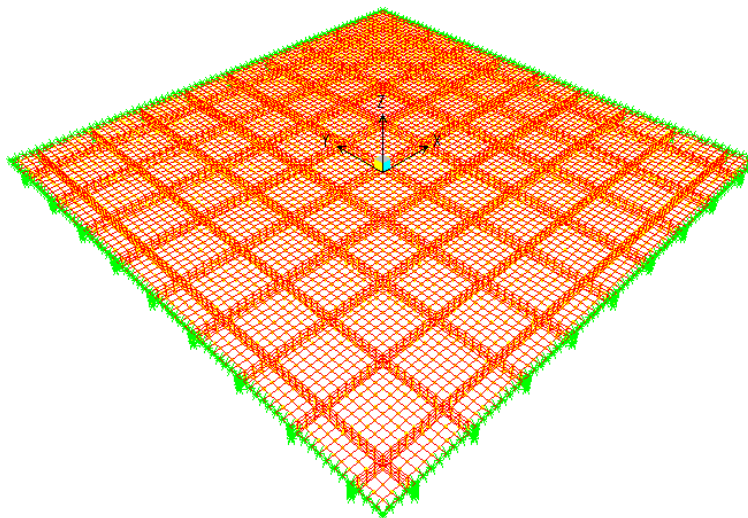


Figura 6.33 - Laje nervurada do exemplo 2 discretizada inteiramente por elementos finitos.

Foi utilizada para a mesa uma malha quadrada de 7,25 x 7,25 cm e para as nervuras foi utilizada uma malha retangular de 7,25 cm de largura por 3,5 cm de altura.

As condições de apoio utilizadas, para que se possa comparar com os modelos em analogia de grelha, são as mesmas do modelo 1 do exemplo

anterior, ou seja, todos os nós do contorno da laje tiveram os deslocamentos verticais e rotações ao redor do eixo perpendicular aos apoios restringidos.

O cálculo do momento fletor foi feito da mesma forma mostrada no exemplo anterior, e assim como ocorreu no exemplo 1, o somatório das forças normais atuantes na nervura+mesa resultou diferente de zero. Assim como ocorreu no exemplo anterior a força resultante encontrada nas seção T (nervura+mesa) foi de tração, com exceção das duas seções T mais próximas dos bordos, onde a força resultante foi de compressão.

Para este exemplo também foram estudados os modelos 2 e 3, cujos resultados são mostrados mais adiante.

Exemplo 3

O exemplo 3 do modelo de analogia de grelha vai ser agora discretizado inteiramente por elementos finitos, como pode ser observado na Figura 6.34:

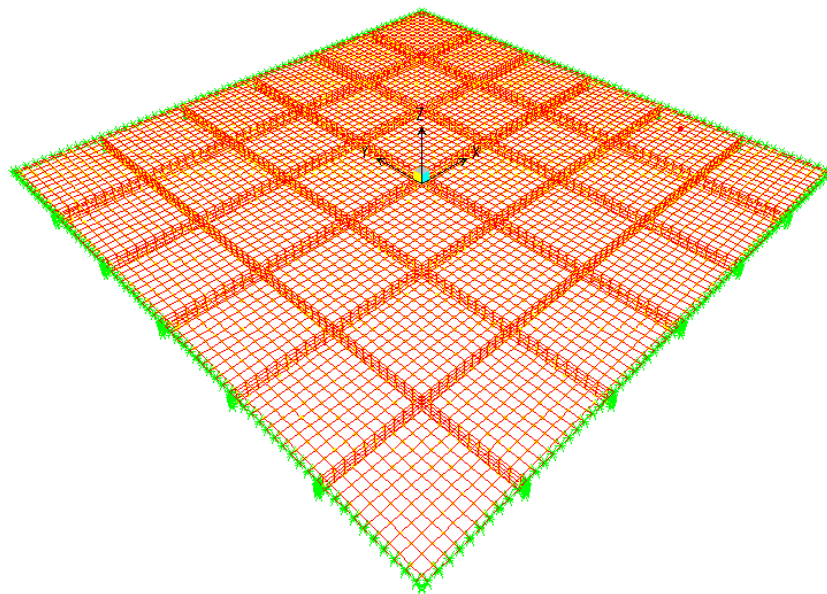


Figura 6.34- Laje nervurada do exemplo 3 discretizada inteiramente por elementos finitos.

Foi utilizada para a mesa uma malha quadrada de 8 x 8 cm e para as nervuras foi utilizada uma malha retangular de 8 cm de largura por 3,5 cm de altura.

As condições de apoio utilizadas, para que se possa comparar com os modelos em analogia de grelha, são as mesmas do modelo 1 dos exemplos anteriores, ou seja, todos os nós do contorno da laje tiveram os deslocamentos verticais e rotações ao redor do eixo perpendicular aos apoios restringidos.

O cálculo do momento fletor foi feito da mesma forma mostrada no exemplo 1, e assim como ocorreu nos exemplos anteriores, o somatório das forças normais atuantes na nervura+mesa resultou diferente de zero. A força resultante encontrada nas seções T (nervura+mesa) foi de tração, com exceção da seção T mais próxima do bordo, onde a força resultante foi de compressão.

Para este exemplo também foram estudados os modelos 2 e 3, cujos resultados são mostrados mais adiante.

Exemplo 4

O exemplo 4 do modelo de analogia de grelha vai ser agora discretizado inteiramente por elementos finitos, como pode ser observado na Figura 6.35:

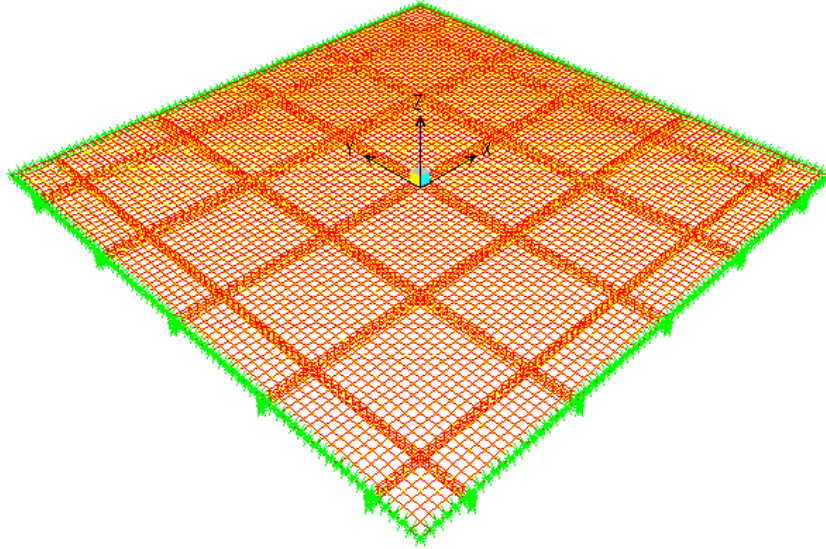


Figura 6.35 - Laje nervurada do exemplo 4 discretizada inteiramente por elementos finitos

Foi utilizada para a mesa uma malha quadrada de 7,2 x 7,2 cm e para as nervuras foi utilizada uma malha retangular de 7,2 cm de largura por 3,5 cm de altura.

As condições de apoio utilizadas, para que se possa comparar com os modelos em analogia de grelha, são as mesmas do modelo 1 dos exemplos anteriores, ou seja, todos os nós do contorno da laje tiveram os deslocamentos verticais e rotações ao redor do eixo perpendicular aos apoios restringidos.

O cálculo do momento fletor foi feito da mesma forma mostrada no exemplo 1, e assim como ocorreu nos exemplos anteriores, o somatório das forças normais atuantes na nervura+mesa resultou diferente de zero. Assim como ocorreu no exemplo anterior a força resultante encontrada nas seções T (nervura+mesa) foi de tração, com exceção da seção T mais próxima do bordo, onde a força resultante foi de compressão.

Para este exemplo também foram estudados os modelos 2 e 3, cujos resultados são mostrados mais adiante.

6.3.1 MODELOS ESTUDADOS

Para os exemplos 1, 2, 3 e 4 discretizados por elementos finitos foram estudados 3 modelos:

- Modelo 1- $M1(J)$: o modelo 1, conforme já foi comentado anteriormente, é similar à análise $A1(J)$ de analogia de grelha. A mesa e as nervuras são discretizadas por elementos finitos de casca. Todos os nós do contorno da laje apresentam deslocamentos verticais e rotações ao redor do eixo perpendicular aos apoios restringidos.
- Modelo 2- $M2(1\%J)$: o modelo 2 é similar à análise $A2(1\%J)$ de analogia de grelha, ou seja, a rigidez à torção das nervuras é desprezada. Portanto a mesa é discretizada por elementos finitos de casca e as nervuras são discretizadas por elementos de estado plano de tensões (PLANE). As condições de apoio são as mesmas do modelo 1.
- Modelo 3- $M3(20X50, J)$: esse modelo é similar à análise $A7(20X50, J)$ de analogia de grelha, onde a laje é considerada apoiada em vigas de 20/50, considerando-se a rigidez à torção das nervuras, porém a rigidez à torção das vigas de borda é desprezada. Portanto, neste modelo, a mesa e as nervuras são discretizadas por elementos de casca e as vigas de borda são discretizadas por elementos de estado plano de tensões (PLANE).

6.3.2 RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos através do modelo em elementos finitos são mostrados a seguir, juntamente com os obtidos por analogia de grelha, para facilitar a comparação entre os dois métodos.

Tabela 6.47 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 1, para os 3 modelos analisados

Exemplo 1	Mx=My (kN.m)	mx=my (kNm/m)	Resultante Normal (kN)	Flecha (cm)
M1(J)	2,87	7,55	7,56	0,78
A1(J)	3,54	9,32	-----	0,94
M2(1%J)	3,35	8,82	9,63	0,90
A2(1%J)	4,06	10,68	-----	1,07
M3(20x50, J)	3,04	8,00	2,26	0,93
A7(20x50, J)	3,44	9,05	-----	1,09

Tabela 6.48 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 2, para os 3 modelos analisados

Exemplo 2	Mx=My (kN.m)	mx=my (kNm/m)	Resultante Normal (kN)	Flecha (cm)
M1(J)	4,40	7,59	12,14	1,08
A1(J)	5,25	9,05	-----	1,23
M2(1%J)	5,08	8,76	14,65	1,25
A2(1%J)	6,15	10,60	-----	1,43
M3(20x50, J)	4,60	7,93	4,29	1,23
A7(20x50, J)	5,12	8,83	-----	1,37

Tabela 6.49 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 3, para os 3 modelos analisados

Exemplo 3	Mx=My (kN.m)	mx=my (kNm/m)	Resultante Normal (kN)	Flecha (cm)
M1(J)	6,90	7,84	19,57	1,60
A1(J)	8,12	9,23	-----	1,71
M2(1%J)	7,43	8,44	21,48	1,70
A2(1%J)	9,25	10,51	-----	1,93
M3(20x50, J)	7,09	8,06	8,41	1,74
A7(20x50, J)	7,85	8,92	-----	1,83

Tabela 6.50 – Resultado dos momentos fletores, resultantes normais e flechas máximas encontradas para a seção T central da laje do exemplo 4, para os 3 modelos analisados

Exemplo 4	Mx=My (kN.m)	mx=my (kNm/m)	Resultante Normal (kN)	Flecha (cm)
M1(J)	8,01	7,42	23,03	1,80
A1(J)	9,27	8,58	-----	1,85
M2(1%J)	9,01	8,34	26,44	2,02
A2(1%J)	11,22	10,39	-----	2,24
M3(20x50, J)	8,23	7,62	9,01	1,95
A7(20x50, J)	9,00	8,33	-----	1,96

6.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

- Fazendo-se uma seção no centro da laje do exemplo 1, pode-se traçar o diagrama de tensões de compressão atuantes na mesa da laje nervurada, conforme pode ser observado na Figura 6.36 (diagrama do bordo esquerdo da laje até o centro), para o modelo $M1(J)$. Os nós marcados com quadrados maiores são os nós sob os quais estão localizadas as nervuras da laje. Percebe-se que existe uma concentração de tensões próxima ao bordo da laje. Ao fazer o somatório de todas as forças normais atuantes nesta seção, a resultante obtida é praticamente nula (0,6 kN), conforme já era de se esperar, visto que a estrutura está em equilíbrio. A Figura 6.37 e 6.38 mostram os diagramas de tensões de compressão atuantes na mesa da laje nervurada do exemplo 1 para os modelos $M2(1\% J)$ e $M7(20 \times 50, J)$ respectivamente

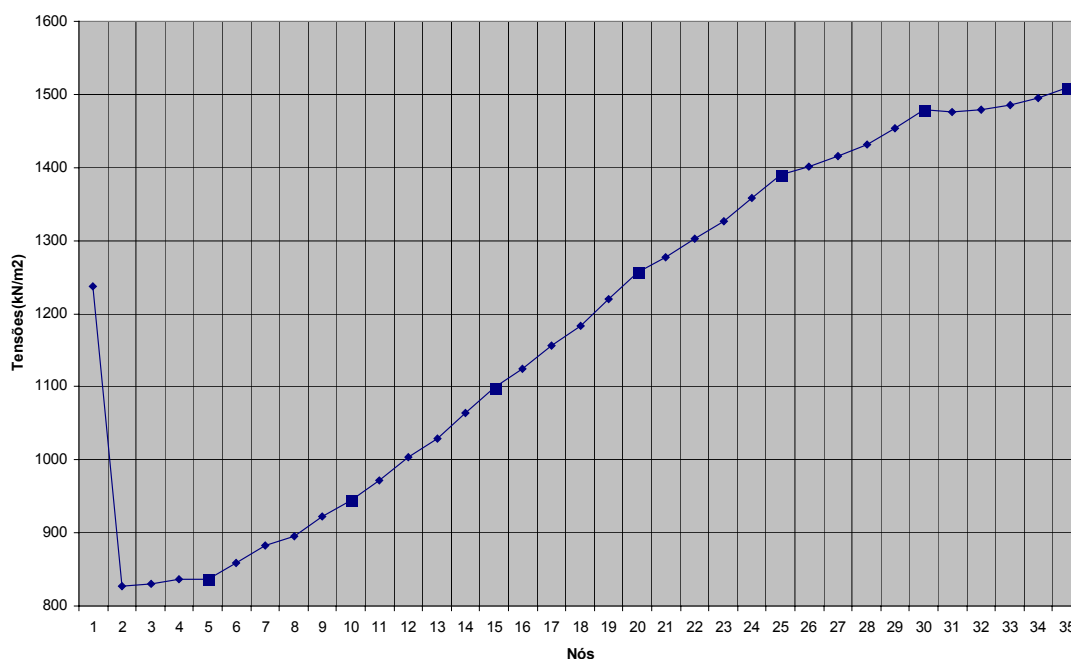


Figura 6.36 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje nervurada do modelo 1 em EF (do bordo esquerdo até o centro da laje)

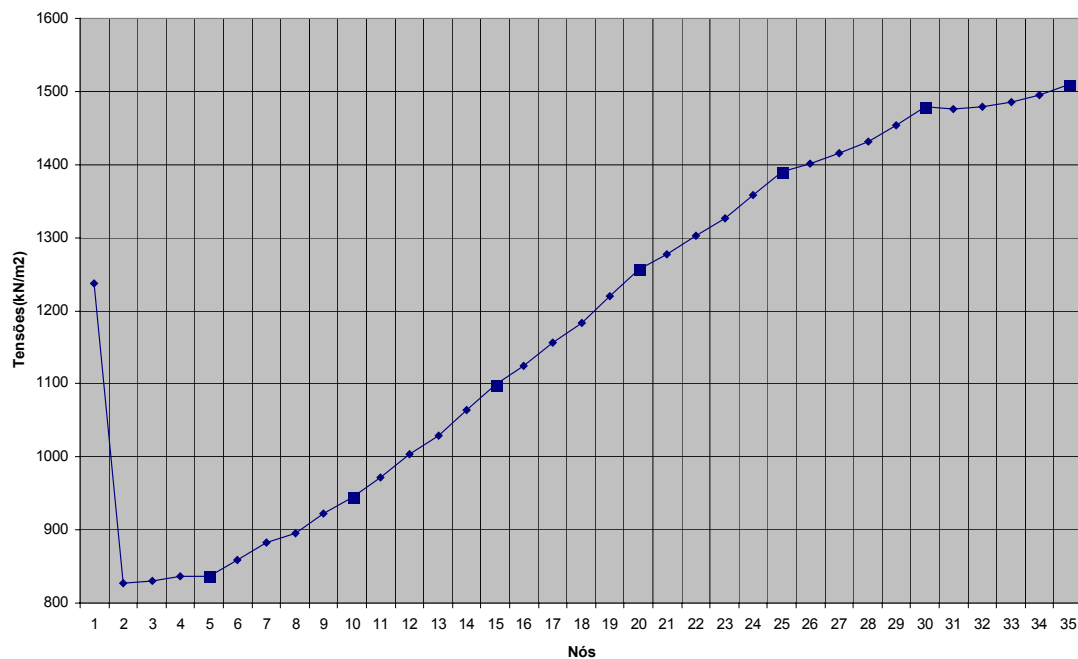


Figura 6.37 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 1, do modelo 2 em EF (do bordo esquerdo até o centro da laje)

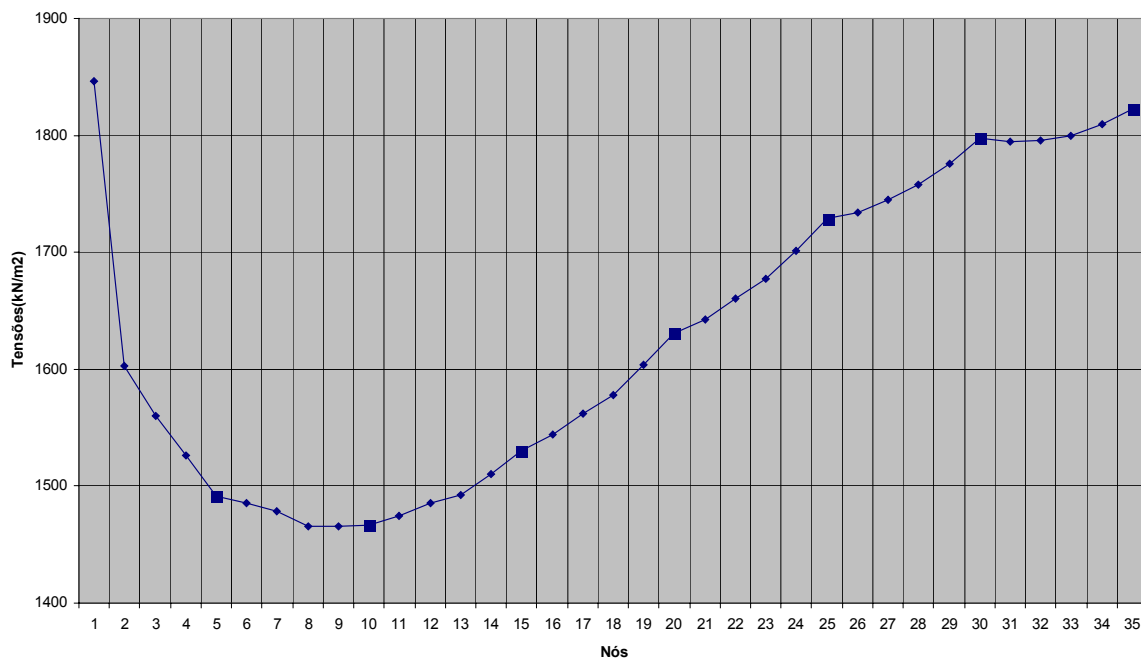


Figura 6.38 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 1, do modelo 3 em EF (do bordo esquerdo até o centro da laje)

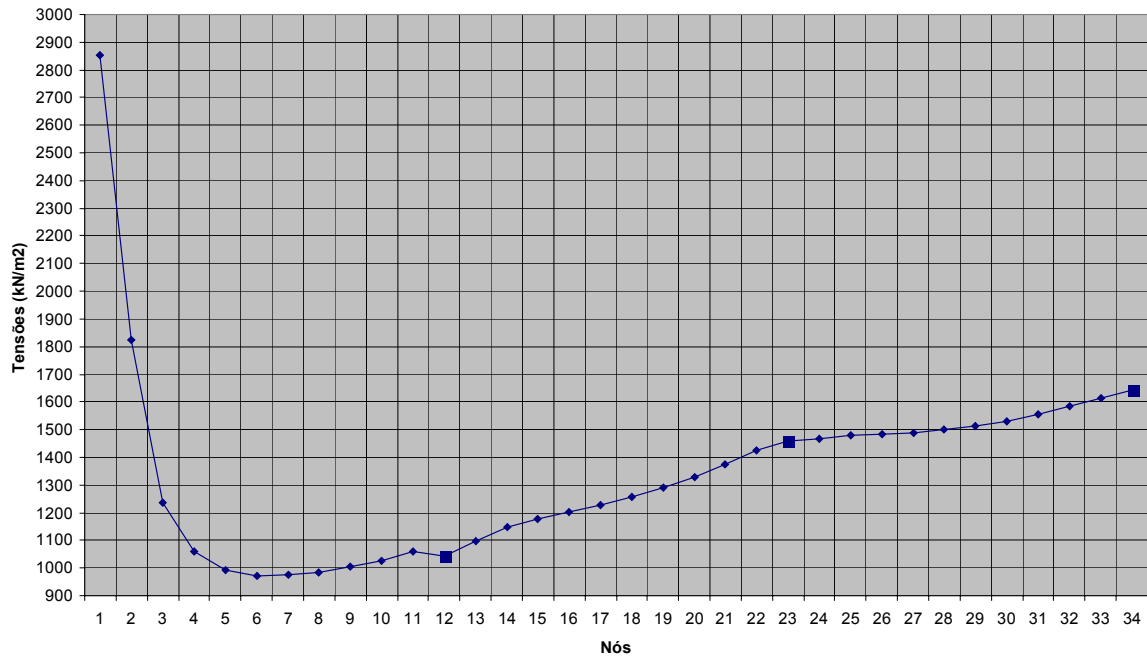


Figura 6.39 - Diagrama das tensões de compressão atuantes na mesa da laje do exemplo 3, do modelo 3 em EF (do bordo esquerdo até o centro da laje)

- Comparando os resultados dos 4 exemplos obtidos com os modelos em elementos finitos e com os modelos de analogia de grelha, percebe-se que, no último caso, os momentos fletores e as flechas obtidas foram maiores. Um dos principais motivos porque isto ocorre é que na análise por analogia de grelha não existe a consideração da ligação existente entre as mesas das barras da grelha, ao contrário do que ocorre em elementos finitos, onde toda a mesa é discretizada, formando uma estrutura contínua. Dessa forma, a mesa irá oferecer uma certa resistência à torção das nervuras, proporcionando uma rigidez à torção mais elevada para a laje nervurada.
- É importante notar que mesmo quando a laje é totalmente discretizada por elementos finitos, sem desprezar a rigidez à torção das nervuras (modelo $M1(J)$), os resultados dos momentos fletores e flechas obtidos resultaram em torno de 24% e 61% respectivamente maiores do que aqueles calculados como placas elásticas, conforme permite a NBR-6118/78.

- Foi visto nas análises dos exemplos em analogia de grelha, que, ao contrário do que se esperava, à medida que se aumentou o espaçamento entre as nervuras, as diferenças entre as flechas obtidas através da analogia de grelha (análise $A2(1\%J)$) e através do cálculo como placa pela teoria da elasticidade diminuíram. Entretanto ao se comparar o modelo $M2(1\%J)$ em elementos finitos com o modelo das placas elásticas $A12(TE-CZERNY)$ (Figura 6.41), percebe-se que as diferenças entre as flechas calculadas por esses dois modelos realmente aumentam com o aumento do espaçamento entre as nervuras. Isto já era de se esperar, pois quanto menor o espaçamento entre as nervuras, mais o comportamento da laje nervurada se aproxima ao de uma laje maciça. Além disso, esta comprovação feita através dos modelos em EF, reforça a afirmação feita anteriormente, com relação ao fato do modelo de analogia de grelha apresentar algumas incoerências.

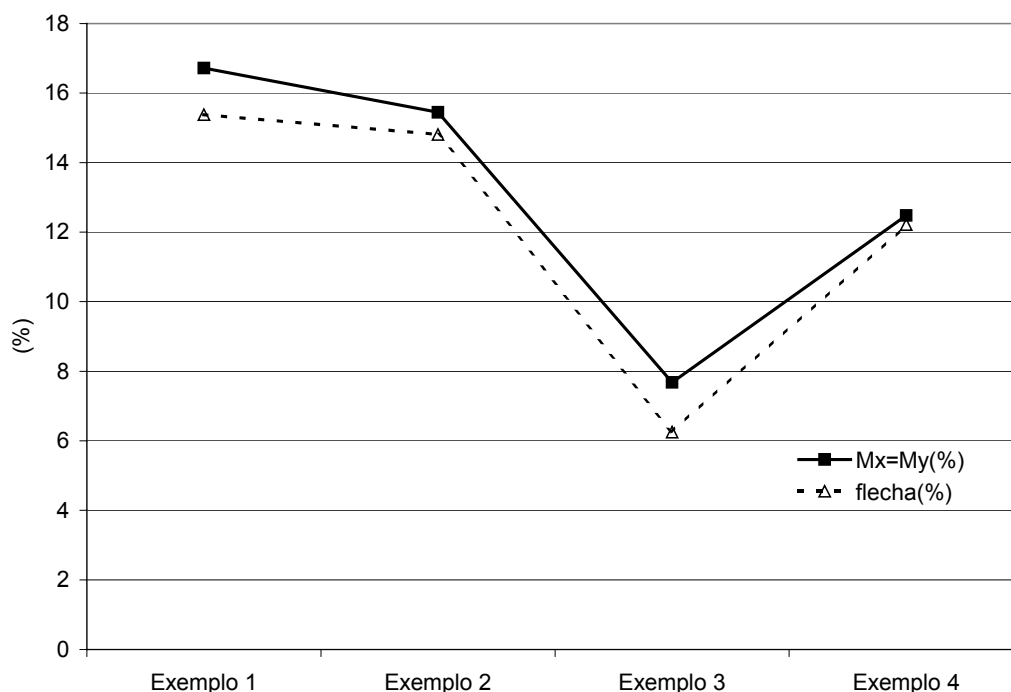


Figura 6.40 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos e flechas obtidos pelos modelos $M1(J)$ e $M2(1\%J)$

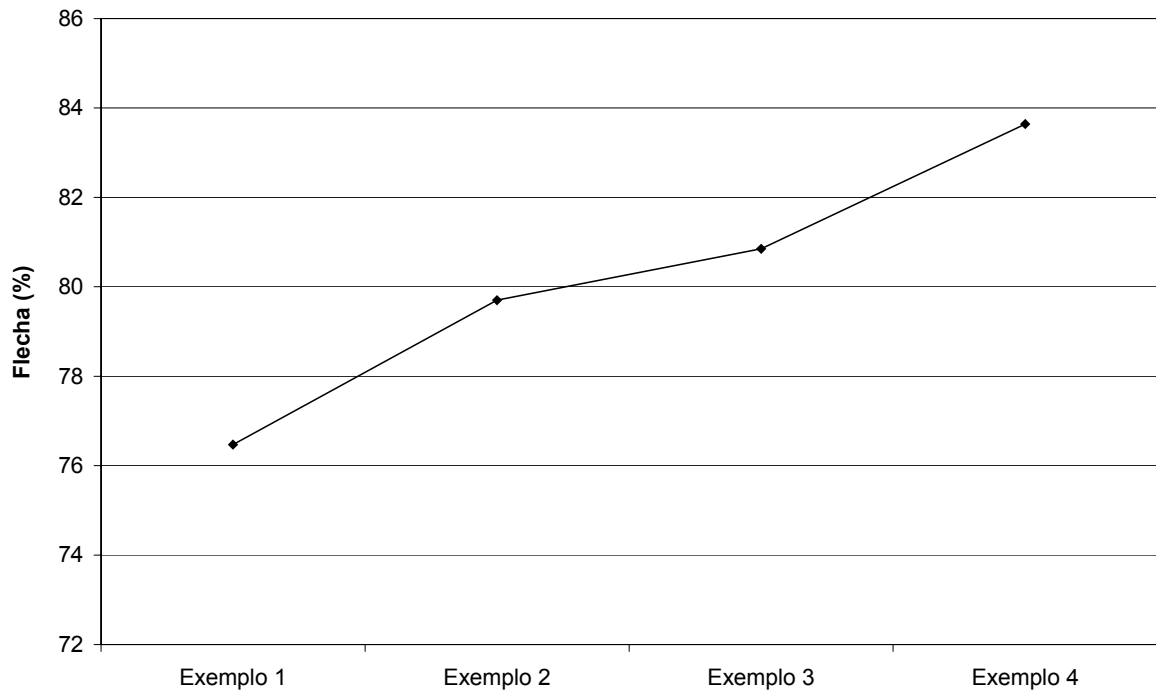


Figura 6.41 - Diferenças percentuais entre as flechas obtidas pelo modelo $M2(1\% J)$ e o cálculo como placa pela teoria da elasticidade ($A12(TE-CZERNY)$)

- As diferenças dos resultados obtidos entre o modelo $M1(J)$ em elementos finitos e a análise $A1(J)$ de analogia de grelha diminuíram com o aumento do espaçamento entre as nervuras. É interessante observar na Figura 6.42 como a variação da diferença entre as flechas desses dois modelos é acentuada, passando de 20% no exemplo 1, para 3% no exemplo 4. Isto comprova o fato de que ao se aumentar o espaçamento das nervuras, mais a laje nervurada se comporta como uma grelha.

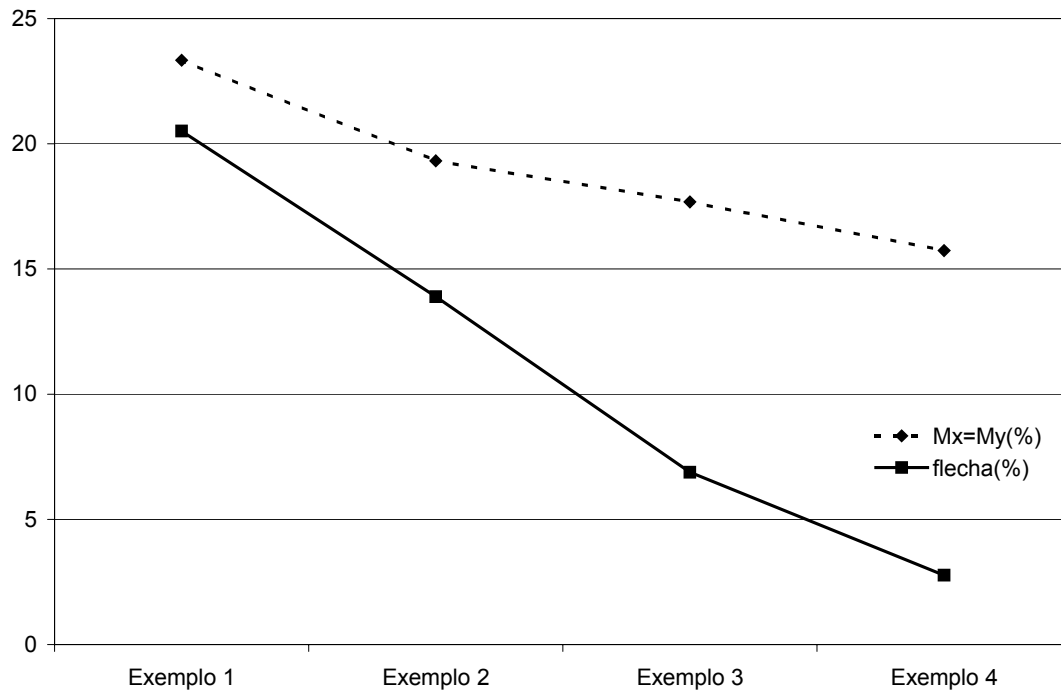


Figura 6.42 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos flettores e flechas obtidos pelo modelo 1(elementos finitos) e análise 1(analogia de grelha)

- Observando a Figura 6.43 nota-se que as diferenças entre as flechas obtidas com o modelo $M2(1\%J)$ (elementos finitos) e com a análise $A2(1\%J)$ (analogia de grelha) também diminuem com o aumento do espaçamento entre as nervuras, entretanto o mesmo não se verifica para os momentos flettores.
- É interessante observar na Figura 6.44 que as diferenças entre os momentos flettores e flechas obtidos com o modelo $M3(20X50,J)$ (elementos finitos) e com a análise $A7(20X50,J)$ (analogia de grelha) também diminuem com o aumento do espaçamento entre as nervuras, e assim como ocorreu na comparação feita entre o modelo $M1(J)$ e a análise $A1(J)$, a variação das flechas foi bastante acentuada, passando de 17,5% no exemplo 1 para 0,5% no exemplo 4.

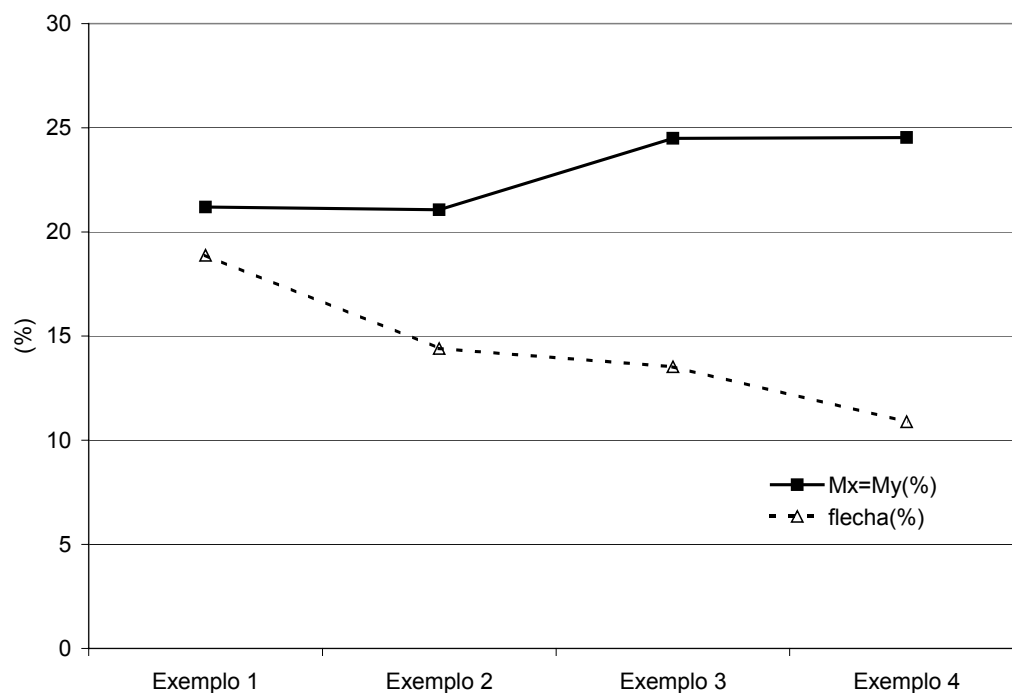


Figura 6.43 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos fletores e flechas obtidos pelo modelo 2 (elementos finitos) e análise 2 (analogia de grelha)

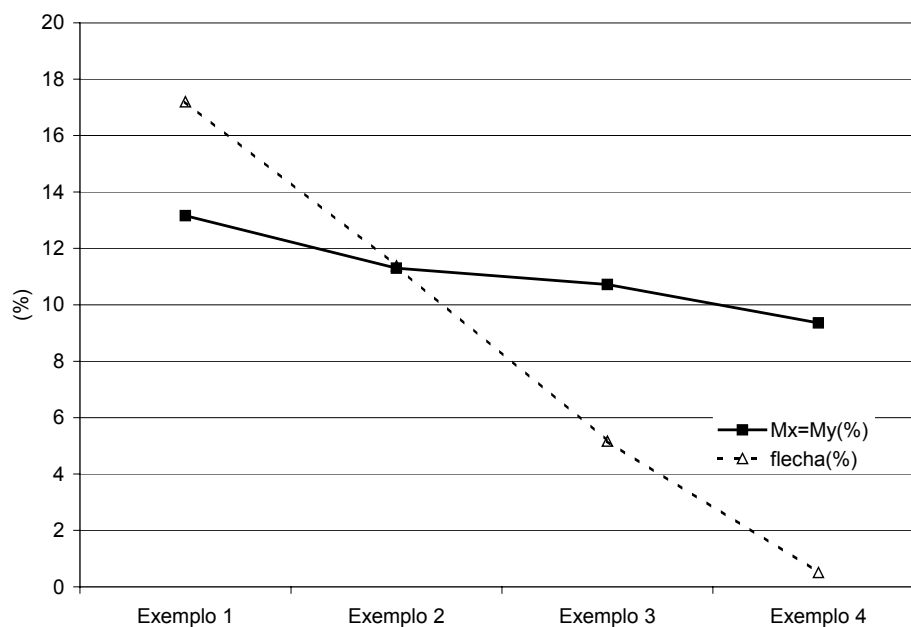


Figura 6.44 - Diferenças percentuais entre os valores de momentos fletores e flechas obtidos pelo modelo 3 (elementos finitos) e análise 7 (analogia de grelha)

- Percebe-se através da Figura 6.40 , ao comparar os resultados obtidos através dos modelos $M1(J)$ e $M2(1\%J)$, que a colaboração da rigidez à torção das nervuras na obtenção dos momentos fletores e deslocamentos, obviamente tende a diminuir com o aumento do espaçamento entre nervuras, pois o número das mesmas diminui. Entretanto nota-se que ocorre um aumento da colaboração da rigidez à torção das nervuras nos valores dos momentos fletores e deslocamentos do exemplo 4 em relação ao exemplo 3. Pois apesar do espaçamento do exemplo 4 ser maior que do exemplo 3, o número de nervuras dessas duas lajes é o mesmo, fazendo com que as distribuições das nervuras nessas duas lajes sejam diferentes. Portanto a configuração da laje do exemplo 4, isto é, por a última nervura estar, no exemplo 4, bem mais próxima do bordo do que no exemplo 3, implica numa maior influência da rigidez à torção das nervuras na obtenção dos momentos fletores e deslocamentos.
- Pode-se perceber, em todos os exemplos, que apesar dos momentos fletores nas análises $A1(J)$ resultarem maiores do que os obtidos nos modelos $M2(1\%J)$, a existência da força normal de tração na nervura, no modelo de elementos finitos, faz com que a armadura calculada no modelo $M2(1\%J)$ seja maior que na análise $A1(J)$. A Tabela 6.51 mostra as armaduras calculadas para o exemplo 1.

Tabela 6.51 – Resultado das armaduras calculadas para a seção T central da laje do exemplo 1, levando em consideração os momentos fletores e resultantes normais

Exemplo	$M_x=M_y$	Resultante	A_s
1	(kN.m)	Normal (kN)	(cm²)
$M1(J)$	2,87	7,56	0,73
$A1(J)$	3,54	-----	0,81
$M2(1\%J)$	3,35	9,63	0,86
$A2(1\%J)$	4,06	-----	0,93

- Da análise das Figuras 6.45 e 6.46, nota-se que apesar dos resultados obtidos pela análise $A4(J_{K\&B})$ serem mais próximos do modelo $M1(J)$ (elementos finitos), do que os obtidos pela análise $A1(J)$, a diferença entre os resultados de $A4(J_{K\&B})$ e $A1(J)$ são muito pequenas.

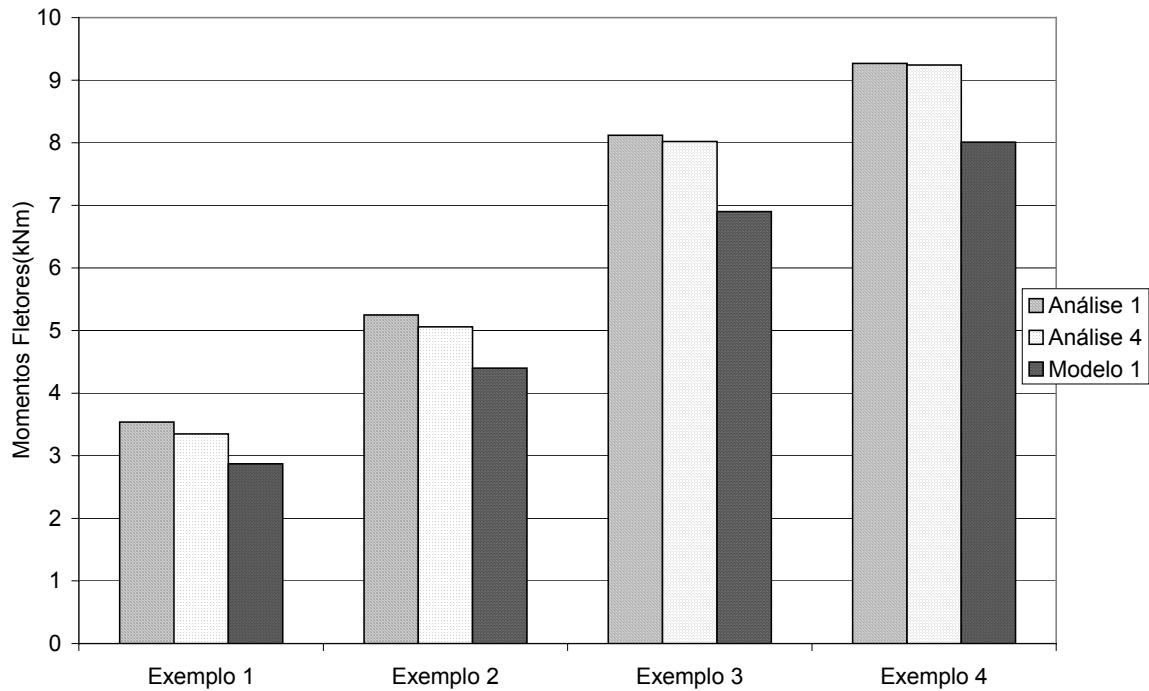


Figura 6.45 - Resultados dos momentos fletores obtidos pela análise $A1(J)$ (analogia de grelha com J calculado pela eq. 5.7), análise $A4(J_{K\&B})$ (analogia de grelha com J calculado pela eq. 2.43) e pelo modelo $M1(J)$ (elementos finitos)

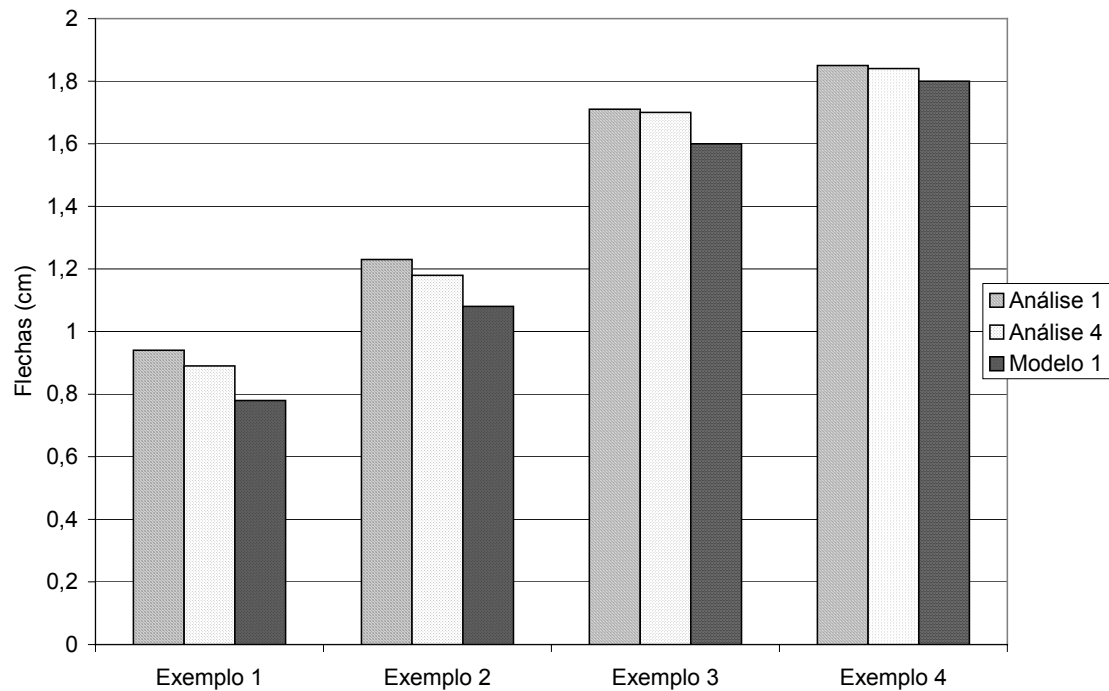


Figura 6.46 - Resultados das flechas obtidas pela análise A1(J) (analogia de grelha com J calculado pela eq. 5.7), análise A4($J_{K\&B}$) (analogia de grelha com J calculado pela eq. 2.43) e pelo modelo M1(J) (elementos finitos)

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Baseando-se nos resultados obtidos através desse estudo realizado para as lajes nervuradas, pode-se concluir que:

- O modelo de analogia de grelha mostrou, já para as lajes maciças, uma certa irregularidade na variação dos resultados obtidos à medida que diminui-se o espaçamento das barras da grelha, ou seja, ao contrário do que se esperava, em muitos casos não foi a grelha com barras menos espaçadas que apresentou os resultados mais próximos da teoria da elasticidade. Entretanto, tomando-se alguns cuidados com a relação J/I utilizada no modelo de analogia de grelha, os resultados obtidos podem ser bastante próximos daqueles encontrados pela teoria da elasticidade.
- Pode-se dizer que a utilização do modelo de analogia de grelha para representação das lajes nervuradas é bastante adequado, pois além de ter apresentado bons resultados quando comparado com o modelo em elementos finitos, ele é fácil de ser utilizado e assimilado pelos projetistas. Já o modelo em elementos finitos, apesar de fornecer resultados mais reais, mostrou grandes dificuldades de utilização, principalmente para obtenção dos momentos fletores, tornando pouco provável sua utilização cotidiana em escritórios de projetos estruturais. Outra vantagem apresentada pelo modelo de analogia de grelha para representação das lajes nervuradas é o fato do mesmo fornecer os momentos fletores por nervura. Desta forma, as mesmas podem ser detalhadas com armaduras diferentes, resultando num projeto mais econômico, ao contrário do que acontece quando a laje nervurada é calculada pelo modelo de placa elástica, onde, normalmente, a armadura calculada para cobrir o momento máximo é repetida para todas as nervuras.
- Ficou claro, através dos resultados obtidos, que o cálculo das lajes nervuradas como placas elásticas, conforme permitido pela norma NBR-6118/78, fornece momentos elásticos e flecha menores do que os obtidos nas análises deste trabalho, inclusive para a laje com

espaçamento livre entre nervuras de 30 cm, que por ter um espaçamento entre as nervuras reduzido deveria apresentar um comportamento mais próximo de uma placa. Portanto mesmo que sejam obedecidas as recomendações da norma NBR-6118/78 quanto ao dimensionamento, as lajes nervuradas não devem ser calculadas como placas elásticas, a não ser que se calcule os esforços sem considerar a rigidez à torção.

- Com relação às lajes nervuradas, já construídas, calculadas como placas elásticas, conforme permitido pela norma vigente NBR-6118/78, pode-se dizer que muitas dessas lajes apresentaram problemas de flechas excessivas, provocando fissuras nas alvenarias, entretanto as mesmas continuam sendo utilizadas sem apresentarem problemas de ruptura. Isto é possível porque a laje deve estar funcionando plasticamente. Pois, quando a laje é calculada pela teoria das placas elásticas, existe uma reserva de capacidade resistente que é mobilizada pela plastificação sucessiva das seções transversais, formando charneiras plásticas (LORIGGIO,2001).
- Com respeito ao coeficiente de rigidez à torção das nervuras, utilizado no modelo de analogia de grelha, pode-se dizer o seguinte:
 1. Para um dimensionamento elástico, a solução que parece ser mais adequada é desprezar a rigidez à torção das nervuras, fazendo com que os momentos fletores aumentem, porém desta forma não será necessário considerar os momentos torsores nas nervuras. (Neste trabalho a rigidez à torção não foi considerada igual a zero, mas 1% de J , que resultou em momentos torsores praticamente nulos). Entretanto, conforme já foi comentado, a reserva de capacidade resistente existente na laje devido ao cálculo elástico, pode ser melhor aproveitada através de uma análise plástica. Portanto, recomenda-se para trabalhos futuros, que se faça uma análise plástica para lajes nervuradas por analogia de grelha, pois dessa forma haverá economia no dimensionamento dessas lajes.
 2. Já ao se utilizar a rigidez à torção integral das nervuras, no dimensionamento, os momentos torsores existentes nas mesmas

serão elevados e conforme recomenda a revisão da NBR-6118:2001, as nervuras deverão ser armadas através de estribos e barras longitudinais adicionais. Como normalmente as nervuras da laje são pequenas, a colocação de estribos nas mesmas dificultará bastante o processo construtivo. Entretanto, parece ser possível dimensionar a laje nervurada por analogia de grelha considerando o J integral da nervura e desprezando os momentos torsores existentes na mesma, haja visto que os momentos fletores (e nos exemplos 1 e 3, as flechas) obtidos no modelo M2(1% J) em elementos finitos, o qual despreza a rigidez à torção das nervuras, resultaram menores do que os obtidos pela análise A1(J) de analogia de grelha, apesar da armadura resultar um pouco maior na análise A1(J) do que no modelo M2(1% J) devido ao esforço normal de tração (entretanto essa diferença é pequena). Portanto, a discretização em elementos finitos mostra que a continuidade da mesa proporciona uma rigidez maior à laje nervurada que não é representada no modelo de analogia de grelha, e por isso, os momentos e deslocamentos obtidos no modelo de elementos finitos sem considerar a rigidez à torção das nervuras ainda resultam menores do que no modelo de analogia de grelha que considera a rigidez à torção integral das nervuras. Todavia, para que essa consideração possa ser feita, é necessária uma verificação dos esforços existentes na mesa, provenientes do modelo em elementos finitos. Portanto são necessários mais estudos abordando esse aspecto.

3. Para simular uma situação de serviço (flechas ou momentos) deve-se considerar, segundo a revisão da NBR-6118:2001, uma rigidez (EI) equivalente, que leva em conta a fissuração da seção; deve-se considerar, também, a fluência (deformação lenta) da laje e utilizar 15% do valor calculado da rigidez à torção das nervuras. Entretanto, usar 15% de J , conforme recomenda a revisão da NBR-6118:2001 para estruturas em geral, subestima a rigidez à torção da laje nervurada porque despreza a influência da mesa contínua e uma eventual rigidez da nervura. Dessa forma,

os resultados obtidos com J integral (eq. 5.16) fornecem resultados mais coerentes com a análise de elementos finitos. Isto pode ser verificado comparando-se os resultados das flechas entre a análise $A1(J)$ e o modelo $M2(1\%J)$, pois pode-se perceber no exemplo 2, por exemplo, que esses resultados foram muito próximos e nos exemplos 1 e 3 as flechas da análise $A1(J)$ foram ainda maiores do que no modelo $M2(1\%J)$.

4. Com relação ao valor de J calculado segundo KENNEDY & BALI através da equação 2.51, utilizado no modelo de analogia de grelha, pode-se dizer que a influência nos resultados dos esforços e deslocamentos em relação aos valores obtidos com J calculado pela equação 5.16, é maior quanto menor for o espaçamento entre as nervuras. Entretanto as diferenças entre os resultados obtidos através dessas duas equações são pequenas, e apesar da eq. 2.51 representar de forma mais real a rigidez à torção das nervuras, recomenda-se que se utilize a eq. 5.16 para o cálculo de J , pois além de ser mais fácil de ser calculada, os momentos torsores atuantes nas nervuras serão menores.
- As diferenças entre os resultados obtidos pelos modelos de analogia de grelha e placas elásticas diminui com o aumento dos números de bordos engastados. Isto ocorre porque quanto maior o número de bordos engastados, menores serão os momentos torsores atuantes na laje, os quais são responsáveis pelas diferenças encontradas entre esses dois modelos.
 - À medida que a relação entre os lados da laje nervurada aumenta, as diferenças entre os resultados obtidos por analogia de grelha e pelo modelo de placas elásticas diminui. Este fato também ocorre devido aos momentos torsores existentes na laje diminuírem com o aumento da relação entre os lados da laje nervurada, quando a mesma é calculada como placa.
 - Os resultados obtidos com a laje do exemplo 7, indicam que lajes de maiores dimensões são menos influenciadas pela rigidez à torção das

nervuras. Entretanto, para que isto seja comprovado, recomenda-se que sejam estudados mais exemplos dessas lajes.

- Na discretização das lajes nervuradas pelo modelo em elementos finitos, o qual leva em conta o efeito de membrana, percebe-se que esse efeito existe até mesmo para lajes com pequenos deslocamentos, como foi o caso dos exemplos 1,2,3 e 4, onde foram observados esforços de flexão composta localizados nas seções T das lajes.
- Foi visto que, apesar dos exemplos 3 e 4 possuírem espaçamentos diferentes entre as nervuras, o número de nervuras das duas lajes era o mesmo. Isto mostra a influência do posicionamento das nervuras ao longo da laje. No exemplo 3, onde as nervuras são menos espaçadas, as últimas nervuras ficaram mais afastadas dos bordos da laje do que no exemplo 4, conforme pode ser observado nas Figuras 6.37 e 6.39. No caso dessas duas lajes, onde as nervuras e a mesa possuem as mesmas dimensões, fica claro que a laje do exemplo 3 é mais vantajosa de ser utilizada, pois resulta numa flecha e momento máximo menores do que os obtidos pelo exemplo 4.

Como sugestões para continuação deste trabalho indica-se, baseando-se nessa última conclusão, um estudo da influência do posicionamento das nervuras ao longo da laje e um estudo considerando-se uma análise não linear do processo de analogia de grelha para as lajes nervuradas, com a verificação experimental dos resultados obtidos, através da utilização de modelos de lajes nervuradas.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR-6118/78 – Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 1978.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118/2001 – Projeto de revisão e comentários. Rio de Janeiro, 2001.

BARBIRATO, C. B. C. (1997). Contribuições à análise de pavimentos de edifícios em laje nervurada. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BOCCHI JR., C.F.(1995). Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BOCCHI JR., C. F. ; GIONGO, J. S. (1994). Lajes nervuradas: Análise comparativa entre o cálculo aproximado e o cálculo usando a teoria das grelhas. III SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO. São Paulo.

CARVALHO, R. C. (1994). Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos.

COELHO, J.A. (2000). Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

DIAS, R.H.; GIONGO, J.S.; PAIVA, J.B. Análises numéricas de laje nervurada sem vigas considerando diferentes modelos mecânicos. Congresso Brasileiro do Concreto, 43º. , 2001, Foz do Iguaçu – PR. São Carlos, EESC – USP.

DIAS, R.H.; GIONGO, J.S.; PAIVA, J.B. Modelos simplificados e realistas na consideração da excentricidade entre nervuras e capa em lajes nervuradas. Congresso Brasileiro do Concreto, 44^o. , 2002, Brasília. Artigo técnico. São Carlos – SP, 2002.

FRANÇA, A.B.M.; FUSCO, P.B. As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios. São Paulo, AFALA & ABRAPEX, 1997.

GERE, J.M.; WEAVER JR., W. Análise de Estruturas Reticuladas. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

HAMBLY, E.C. Bridge deck behavior. London, Chapman and Hall, 1976.

HAHN, J. Vigas continuas, porticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elastico, Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1972.

KENNEDY, J.B.; BALI, S.K. Rigities of concrete waffle-type slab structure. Canadian Journal of Civil Engineering, vol. 6, no. 1, março, 1979.

KLEIN, D.L.; SELISTRE, S.L.C.(1997). Análise numérico-experimental de lajes nervuradas submetidas a cargas uniformemente distribuídas. JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 18, São Carlos, 1997. Estruturas e Fundações. São Carlos, EESC-USP/ASAEE.

LEONHARDT, F. Construções de concreto, volume 3. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

LIGHTFOOT, E. & SAWKO, F. Structural frame analysis by eletronic computer: grid frameworks resolved by generalized slope deflection. Engineering, 187(18-20), 1959.

MACHADO, C. P.(1983). Fixação prática e econômica das espessuras de lajes usuais maciças e nervuradas de concreto armado. São Paulo.

MELO, F.A.P.; FONTE, A.O.C.; HOROWITZ, B. Análise estrutural de lajes planas sob ação de carregamento vertical, comparando modelos numéricos com experimentais. JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 29, Punta Del Este – Uruguay, 2000.

MONTOYA, J.; MESENGUER, A.G.; CABRE, F. M. Hormigon Armado, Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1973.

NAPPI, S.C.B.(1993). Análise comparativa entre lajes maciças, com vigotes pré-moldados e nervuradas. Dissertação – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

OLIVEIRA, R. S.; ARAÚJO, D. L.; CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. Avaliação da deformação de lajes nervuradas considerando a não-linearidade física: comparação entre valores teóricos e experimentais. Congresso Brasileiro do Concreto, 42^o, 2000, Fortaleza-CE. São Carlos, EESC-USP.

REZENDE, M. N. (1990). Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SELISTRE, S.L.C.; KLEIN, D.L. Análise teórica-experimental do modelo reduzido de uma laje nervurada em microconcreto armado. JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXIX, Punta Del Este – Uruguay, 2000.

STRAMADINOLI JR.,A.(2000). Apostila de “ Estruturas de Edifício “ do curso de especialização em estruturas, UFPR, Curitiba – PR.

GHALI, A.; NEVILLE, A. M. Structural Analysis – A unified classical and matrix approach. E & FN SPON, London, UK, 1997.

TAKEYA, T. Et alli. Recomendações para o projeto e a execução da estrutura em lajes cogumelo pertencentes às unidades básicas de saúde do plano

metropolitano de São Paulo, Relatório Técnico. EESC – USP, São Carlos, 1985.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells, McGraw – Hill Kogakusha, Ltda, 1959.

9. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BARBOZA, A. S. R. (1992). Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes-vigas de concreto armado mediante analogia de grelha. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

COOK, R. D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc. Wisconsin, 1988.

HUSSEIN, A.F.; HARROP, J. (1994). Grillage Analysis of Waffle Slab Structures. 3rd INTER. KERENSKY CONFERENCE, SINGAPORE, JULY, 1994.

LA ROVERE, H. L. (2001). Apostila de “Utilização do método dos elementos finitos em projetos de estruturas” do Curso de Pós-graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

LA ROVERE, H. L. (2001). Apostila de “Análise matricial de estruturas” do Curso de Pós-graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

LORIGGIO, D.D.(2001). Notas de aula de “Placas e lajes de concreto armado” do Curso de Pós-graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

LORIGGIO, D.D.(2000). Notas de aula de “Análise Matricial e Modelagem de Estruturas” do Curso de Pós-graduação em Estruturas, UFSC, Florianópolis – SC.

MACHADO, R.D. (1999). Apostila de “Concreto armado – Lajes” do curso de graduação de engenharia civil, UFPR, Curitiba – PR.

KENNEDY, J.B.; EL-SEBAKHY, I.S. Waffle slab concrete bridges: ultimate behavior. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 108, no ST6, June, 1982.

KENNEDY, J.B. Orientation of Ribs in Waffle-Slab Skew Bridges. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 109, no 3, March, 1983.

JAWAD, M.H. Theory and design of plate and shell structures. Chapman & Hall, Inc. London, 1994.

SAP2000 Analysis Reference, Volume I e II. Computers and Structures, Inc. California, USA, 1996.

